HANDLEIDING

BIJ HET

ONDERWIJS IN DE GONIO- EN TRIGONOMETRIE

AAN DE

Koningin-Wilhelminaschool

TE BATAVIA.

...YGROK & Co. BATAVIA.

hal 69 - Rp -

HANDLEIDING

BIJ HET

ONDERWIJS IN DE GONIO- EN TRIGONOMETRIE

AAN DE

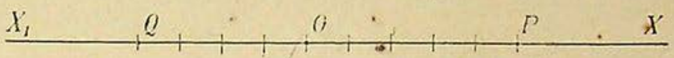
Koningin-Wilhelminaschool

TE BATAVIA.

RUYGROK & Co. BATAVIA.

INLEIDING.

Fig. 1.

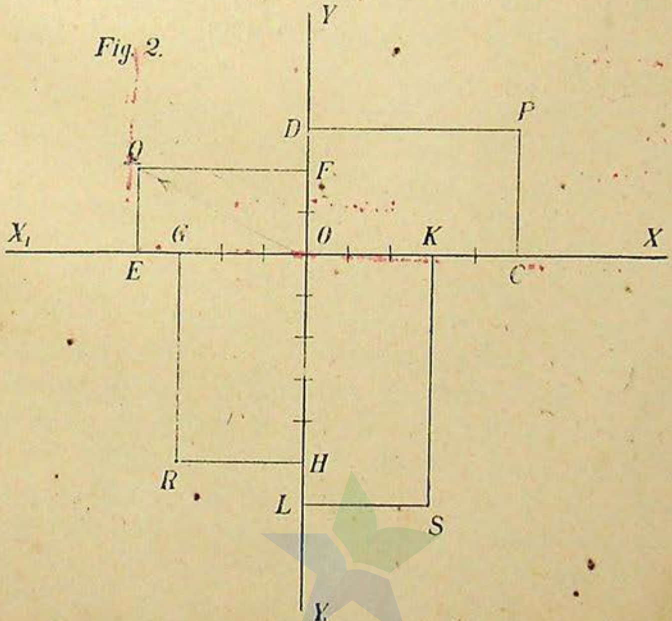


§ 1. We hebben een onbepaald verlengde lijn XX_1. Om de plaats van een punt P daarop te bepalen, nemen we een vast punt O als uitgangspunt aan en gaan na, hoever het punt P rechts of links van dat vaste punt O ligt.

Nemen we een c.M. als eenheid aan en ligt P 5 c.M. rechts van O, dan zeggen we: het punt P ligt op de plaats + 5. Ligt het punt Q op XX_1 en 4 c.M. links van O, dan ligt het op de plaats — 4. Dien afstand van O noemt men de *abscis* van P. De abscis van een punt is *positief*, als het punt *rechts* van het uitgangspunt O ligt en *negatief*, als het punt *links* van O ligt.

Opgave: Wijs aan het punt + 4; het punt + 2; het punt — 3; het punt — $5^1/_2$; het punt o.

Fig. 2.



§ 2. Ligt een punt echter buiten de lijn XX_1, dan is deze lijn alleen niet voldoende om de plaats van het punt juist te bepalen.

We richten dan in O een loodlijn YY_1 op XX_1 op (zie fig. 2). Hoe bepalen we nu de plaats van het punt P?

Uit P laten we een loodlijn PC neer op XX_1 en een loodlijn PD op YY_1. Kennen we de afstanden OC en OD, dan is de plaats van P bepaald.

Den afstand OC noemen we weer de *abscis* van het punt P en den afstand OD de *ordinaat* van P. Is $OC = 5$ en $OD = 3$, dan noemen we de plaats van het punt P: (5, 3).

De ordinaat wordt *positief* gerekend, als hij van O uit *naar boven* wordt gemeten en *negatief*, als hij van O uit *naar beneden* gemeten wordt.

Als $OE = 4$ en $OF = EQ = 2$, dan is $(-4, 2)$ de plaats van het punt Q.

Als $OG = 3$ en $OH = GR = 5$, dan is $(-3, -5)$ de plaats van R.

Is $OK = 3$ en $OL = KS = 7$, dan is $(3, -7)$ de plaats van S.

De lijn, die een bepaald punt met het uitgangspunt O verbindt, heet de *voerstraal* van dat punt. Zoo is OP de voerstraal van het punt P; OQ de voerstraal van het punt Q.

Opgave: Bepaal de plaats van de punten (2, 1); (3, 0) (0, 4); $(-3, 2)$; $(-4, 5)$; $(-6, 0)$; $(0, -5)$; $(-1, -2)$; $(5, -2)$; $(0, -1)$; (0, 0).

§ 3. Door de twee assen, de *abscissen-as* XX_1 en de *ordinaten-as* YY_1 wordt het vlak om O in vier rechte hoeken verdeeld. De rechte hoek XOY heet he *eerste quadrant*. Het punt P ligt dus in het eerste quadrant. De rechte hoek YOX_1 heet het *tweede quadrant*, Q ligt in het tweede quadrant. Zoo heet de rechte hoek X_1OY_1, waarin R ligt, het *derde quadrant* en de rechte hoek Y_1OX, waarin S ligt, het *vierde quadrant*.

Opgaven: 1). In welk quadrant ligt een punt, wanneer zoowel de abscis als de ordinaat positief zijn, in welk quadrant als beide negatief zijn?

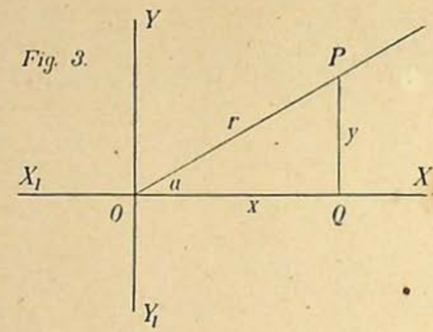
2) In welk quadrant ligt een punt, als de abscis positief is en de ordinaat negatief; in welk quadrant, als de abscis negatief en de ordinaat positief is?

Opmerking: De waarde van de abscis noemen we x, de waarde van de ordinaat y en de waarde van den voerstraal r.

De waarde van x en van y kan positief of negatief zijn, de waarde van r is steeds positief.

HOOFDSTUK I.

Fig. 3.



§ 1. We leggen $\llcorner$ POQ = a met het hoekpunt in O en met het eene been langs OX, het positieve deel der abscissen-as. (Zie fig. 3).

Door het been OP om O te laten draaien, kan men den hoek grooter of kleiner maken en alle waarden van 0° tot 360° laten doorloopen.

Is de hoek kleiner dan 90°, dan ligt het tweede been OP in het eerste quadrant en men spreekt van *een hoek in het eerste quadrant.*

Is de hoek grooter dan 90°, maar kleiner dan 180°, dan ligt het tweede been OP in het tweede quadrant en men spreekt van *een hoek in het tweede quadrant.*

Zoo ligt een hoek, grooter dan 180° maar kleiner dan 270°, *in het derde quadrant* en een hoek grooter dan 270° *in het vierde quadrant.*

§ 2. *Sinus.* We nemen op het beweegbare been OP van $\llcorner$ a (zie fig. 3) een willekeurig punt P en bepalen daarvan de abscis OQ = x, de ordinaat PQ = y en den voerstraal OP = r.

De verhouding van de ordinaat tot den voerstraal noemt men de SINUS van $\llcorner$ *a,* dus $\sin a = \frac{y}{r} = \frac{PQ}{OP}$.

Van enkele hoeken kan men de sinus zelf berekenen:

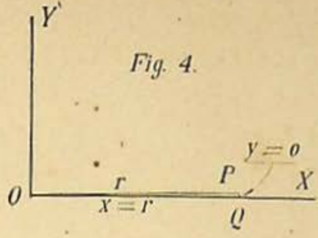


Fig. 4.

$$\text{Sin } 0^o = \frac{y}{r} = \frac{o}{r} = 0.$$

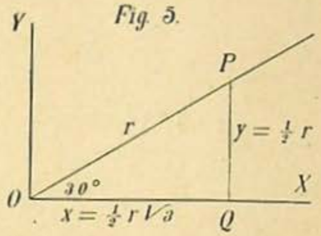


Fig. 5.

$$\text{Sin } 30^o = \frac{y}{r} = \frac{{}^1/_2\, r}{r} = 0{,}5.$$

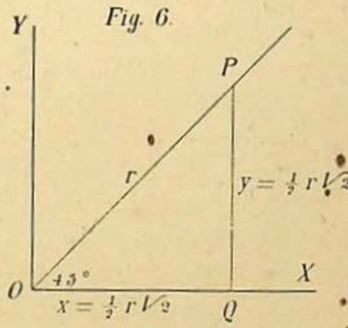
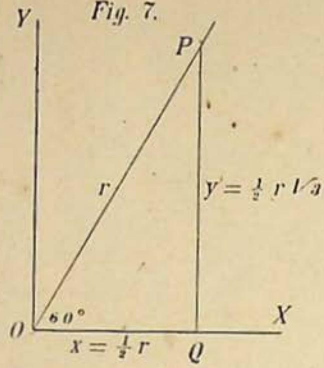


Fig. 6.

$$\text{Sin } 45 = \frac{y}{r} = \frac{{}^1/_2\ r\ \sqrt{2}}{r} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}7071$$

Fig. 7.



$$\text{Sin } 60^\circ = \frac{y}{r} = \frac{\frac{1}{2}\, r \sqrt{3}}{r} = \frac{1}{2} \sqrt{3} = 8660$$

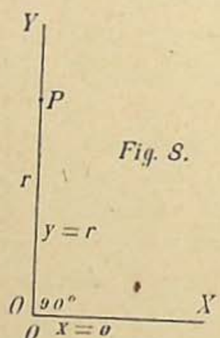
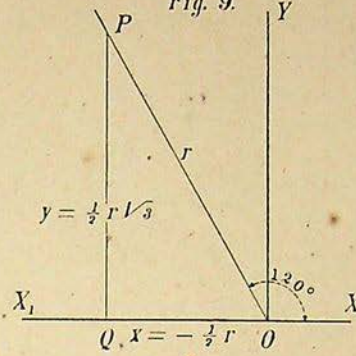


Fig. 8.

$$\text{Sin } 90^\circ = \frac{y}{r} = \frac{r}{r} = 1.$$

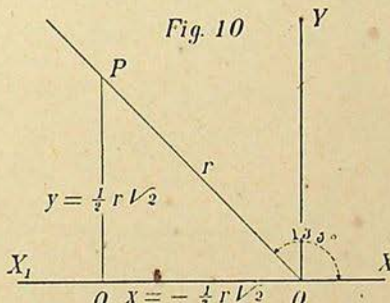
Doorloopt een hoek het eerste quadrant, dus de waarden van 0° tot 90°, dan groeit de sinus aan van 0 tot 1.

Fig. 9.



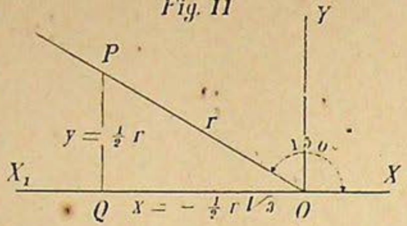
$$\text{Sin } 120^\circ = \frac{y}{r} = \frac{{}^1/_2 \ r \ \sqrt{3}}{r} = \frac{1}{2} \sqrt{3} = 0.8660$$

Fig. 10



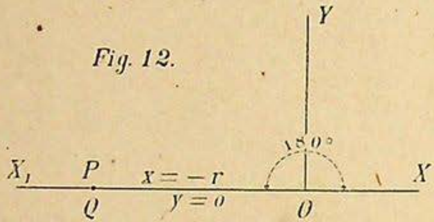
$$\text{Sin } 135^\circ = \frac{y}{r} = \frac{{}^1/_2 \ r \ \sqrt{2}}{r} = {}^1/_2 \sqrt{2} = 0.7071$$

Fig. 11



$$\text{Sin } 150^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1/2\ r}{r} = 0,5$$

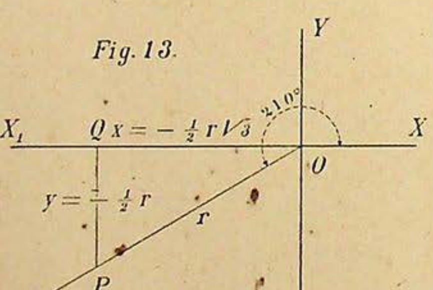
Fig. 12.



$$\text{Sin } 180^\circ = \frac{y}{r} = \frac{0}{y} = 0$$

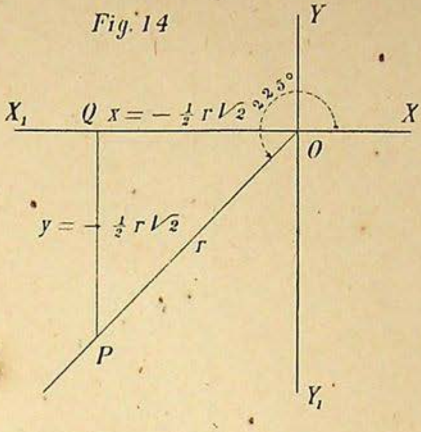
Doorloopt een hoek het tweede quadrant, dus de waarden van 90° tot 180°, dan neemt de sinus af van 1 tot 0.

Fig. 13.



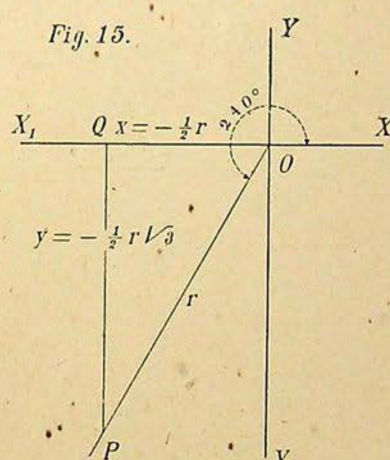
$$\text{Sin } 210^\circ = \frac{y}{r} = \frac{-1/2\ r}{r} = -\frac{1}{2} = -0,5$$

Fig. 14



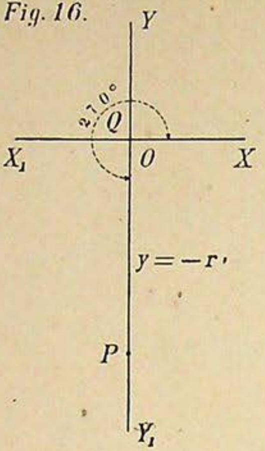
$$\text{Sin } 225^{\circ} = \frac{y}{r} = \frac{-\,^1/_2\, r \sqrt{2}}{r} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} = -\ 0{,}7071$$

Fig. 15.



$$\text{Sin } 240^{\circ} = \frac{y}{r} = \frac{-\,^1/_2\, r \sqrt{3}}{r} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} = -\ 0{,}8660.$$

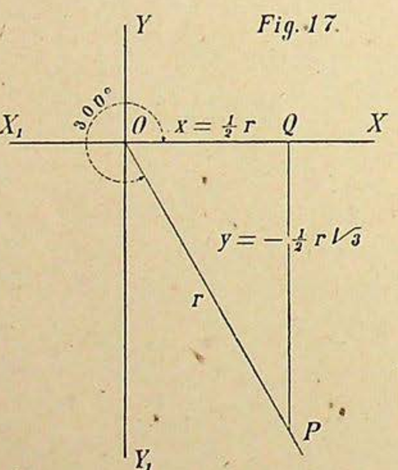
Fig. 16.



$$\text{Sin } 270^\circ = \frac{y}{r} = \frac{-r}{r} = -1.$$

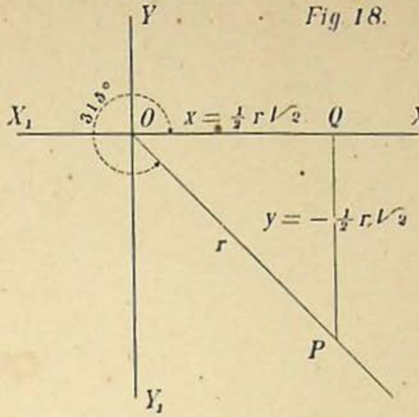
Doorloopt een hoek het derde quadrant, dus de waarden van 180° tot 270°, dan neemt de sinus af van 0 tot — 1.

Fig. 17.



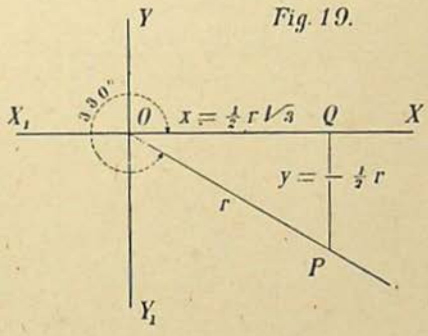
$$\text{Sin } 300^\circ = \frac{y}{r} = \frac{-\,{}^1/_2\, r\sqrt{3}}{r} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} = -0{,}8660$$

Fig 18.



$$\text{Sin } 315^\circ = \frac{y}{r} = \frac{-\,{}^1\!/_2\, r \sqrt{2}}{r} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} = -0{,}7071$$

Fig. 19.



$$\text{Sin } 330^\circ = \frac{y}{r} = \frac{-\,{}^1\!/_2\ r}{r} = -\frac{1}{2} = -\ 0{,}5$$

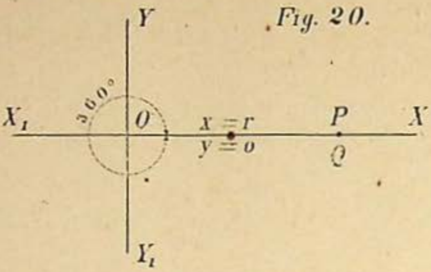


Fig. 20.

Sin 360°. $= \frac{y}{r} = \frac{o}{r} = 0.$

Doorloopt een hoek het vierde quadrant, dus de waarden van 270° tot 360°, dan neemt de sinus toe van — 1 tot 0.

§ 3. *Cosinus:* We nemen op het beweegbare been OP van ∟ a (Zie fig. 3) weer het willekeurige punt P en bepalen daarvan de abscis OQ = x, de ordinaat PQ = y en den voerstraal OP = r.

De verhouding van de abscis tot den voerstraal noemt men de cosinus van ∟ a, dus

$$\cos a = \frac{x}{r} = \frac{OQ}{OP}.$$

Van de hoeken, waarvan we de sinus berekend hebben, kunnen we ook de cosinus berekenen.

[Zie fig. 4 t/m fig. 20].

$$\cos 0^o = \frac{x}{r} = \frac{r}{r} = 1$$

$$\cos 30^o = \frac{x}{r} = \frac{1/_2\ r\sqrt{3}}{r} = 1/_2\sqrt{3} = 0.8660$$

$$\cos 45^o = \frac{x}{r} = \frac{1/_2\ r\sqrt{2}}{r} = 1/_2\sqrt{2} = 0.7071$$

$$\cos 60^o = \frac{x}{r} = \frac{1/_2\ r}{r} = 0{,}5$$

$$\cos 90^o = \frac{x}{r} = \frac{o}{r} = 0.$$

Doorloopt een hoek het eerste quadrant, dan neemt de cosinus af van 1 tot 0.

$$\cos 120^o = \frac{x}{r} = \frac{-\frac{1}{2}r}{r} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$$

$$\cos 135^o = \frac{x}{r} = \frac{-\frac{1}{2}r\sqrt{2}}{r} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} = -0{,}7071$$

$$\cos 150^o = \frac{x}{r} = \frac{-\frac{1}{2}r\sqrt{3}}{r} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} = -0{,}8660$$

$$\cos 180^o = \frac{x}{r} = \frac{-r}{r} = -1.$$

Doorloopt een hoek het tweede quadrant, dan neemt de cosinus af van 0 tot — 1.

$$\cos 210^o = \frac{x}{r} = \frac{-\frac{1}{2}r\sqrt{3}}{r} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} = -0{,}8660$$

$$\cos 225^o = \frac{x}{r} = \frac{-\frac{1}{2}r\sqrt{2}}{r} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} = -0{,}7071$$

$$\cos 240^o = \frac{x}{r} = \frac{-\frac{1}{2}r}{r} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$$

$$\cos 270^o = \frac{x}{r} = \frac{0}{r} = 0.$$

Doorloopt een hoek het derde quadrant, dan neemt de cosinus toe van — 1 tot 0.

$$\cos 300^o = \frac{x}{r} = \frac{\frac{1}{2}r}{r} = 0{,}5$$

$$\cos 315^o = \frac{x}{r} = \frac{\frac{1}{2}r\sqrt{2}}{r} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}7071$$

$$\cos 330^o = \frac{x}{r} = \frac{\frac{1}{2}r\sqrt{3}}{r} = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}8660$$

$$\cos 360^o = \frac{x}{r} = \frac{r}{r} = 1.$$

Doorloopt een hoek het vierde quadrant, dan neemt de cosinus toe van 0 tot 1.

§ 4. *Tangens: De verhouding van de ordinaat van P tot de abscis (Zie fig. 3) noemt men de tangens van* $\angle a$

dus $\operatorname{tg} a = \frac{y}{x} = \frac{PQ}{OQ}$.

$\operatorname{tg} 0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{o}{r} = 0$

$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1/2\, r}{1/2\, r \sqrt{3}} = \frac{1}{3} \sqrt{3} = 0{,}5774$

$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1/2\, r \sqrt{2}}{1/2\, r \sqrt{2}} = 1$

$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1/2\, r \sqrt{3}}{1/2\, r} = \sqrt{3} = 1.7321$

$\operatorname{tg} 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{r}{o} = \infty$

Doorloopt een hoek het eerste quadrant, dan neemt de tangens toe van 0 tot ∞.

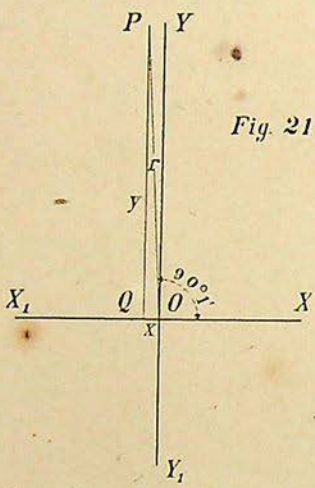


Fig. 21

We nemen een hoek, die iets grooter is dan 90°, bijv. 90°1′ (Zie fig 21).

$\operatorname{tg} 90^\circ 1' = \frac{y}{x} = \frac{PQ}{-OQ}$. Nu is OQ zeer klein ten opzichte van PQ, dus $\frac{PQ}{OQ}$ = een zeer groot getal, maar dan is

$$\text{tg } 90^\circ 1' = \frac{PQ}{-OQ} = \text{zeer groot negatief getal.}$$

$$\text{tg } 120^\circ = \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{2} r \sqrt{3}}{- \frac{1}{2} r} = - \sqrt{3} = - 1{,}7321$$

$$\text{tg } 135^\circ = \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{2} r \sqrt{2}}{- \frac{1}{2} r \sqrt{2}} = - 1$$

$$\text{tg } 150^\circ = \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{2} r}{- \frac{1}{2} r \sqrt{3}} = - \frac{1}{3} \sqrt{3} = - 0{,}5774$$

$$\text{tg } 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{- r} = 0.$$

Doorloopt een hoek het tweede quadrant, dan neemt de tangens toe van $-\infty$ tot 0.

$$\text{tg } 210^\circ = \frac{y}{x} = \frac{- \frac{1}{2} r}{- \frac{1}{2} r \sqrt{3}} = \frac{1}{3} \sqrt{3} = 0{,}5774$$

$$\text{tg } 225^\circ = \frac{y}{x} = \frac{- \frac{1}{2} r \sqrt{2}}{- \frac{1}{2} r \sqrt{2}} = 1$$

$$\text{tg } 240^\circ = \frac{y}{x} = \frac{- \frac{1}{2} r \sqrt{3}}{- \frac{1}{2} r} = \sqrt{3} = 1.7321$$

$$\text{tg } 270^\circ = \frac{y}{x} = \frac{r}{0} = \infty.$$

Doorloopt een hoek het derde quadrant, dan neemt de tangens toe van 0 tot ∞.

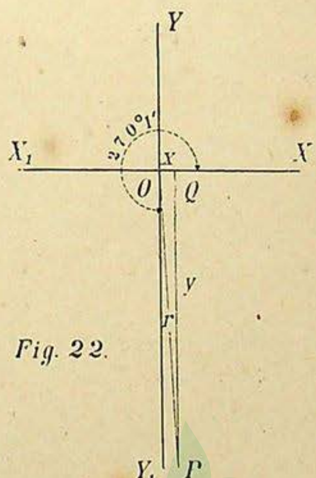


Fig. 22.

We nemen een hoek, iets grooter dan 270°, bijv. 270° 1′ (Zie fig. 22).

$\operatorname{tg} 270^\circ 1' = \frac{y}{x} = \frac{-PQ}{OQ}$. Nu is OQ zeer klein ten opzichte van PQ, dus $\frac{PQ}{OQ}$ = een zeer groot getal, maar dan is

$\operatorname{tg} 270^\circ 1' = \frac{-PQ}{OQ}$ = cen zeer groot negatief getal.

$$\operatorname{tg} 300^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{1}{2} r \sqrt{3}}{\frac{1}{2} r} = -\sqrt{3} = -1{,}7321$$

$$\operatorname{tg} 315^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{1}{2} r \sqrt{2}}{\frac{1}{2} r \sqrt{2}} = -1$$

$$\operatorname{tg} 330^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{1}{2} r}{\frac{1}{2} r \sqrt{3}} = -\frac{1}{3}\sqrt{3} = -0{,}5774$$

$$\operatorname{tg} 360^\circ = \frac{y}{x} = \frac{o}{r} = 0.$$

Doorloopt een hoek het vierde quadrant, dan neemt de tangens toe van —∞ tot 0.

§ 5. *Cotangens: De verhouding van de abscis van P tot de ordinaat (Zie fig. 3) noemt men de cotangens van* ∟ *a*, dus

$$\operatorname{cotg} a = \frac{x}{y} = \frac{OQ}{PQ}.$$

$$\operatorname{cotg} 0^\circ = \frac{x}{y} = \frac{r}{o} = \infty$$

$$\operatorname{cotg} 30^\circ = \frac{x}{y} = \frac{\frac{1}{2} r \sqrt{3}}{\frac{1}{2} r} = \sqrt{3} = 1{,}7321$$

$$\operatorname{cotg} 45^\circ = \frac{x}{y} = \frac{\frac{1}{2} r \sqrt{2}}{\frac{1}{2} r \sqrt{2}} = 1$$

$$\operatorname{cotg} 60^\circ = \frac{x}{y} = \frac{\frac{1}{2} r}{\frac{1}{2} r \sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0{,}5774$$

$$\operatorname{cotg} 90^\circ = \frac{x}{y} = \frac{o}{r} = 0.$$

Doorloopt een hoek het eerste quadrant, dan neemt de cotangens af van ∞ tot 0.

$$\operatorname{cotg} 120^\circ = \frac{x}{y} = \frac{-\frac{1}{2} r}{\frac{1}{2} r \sqrt{3}} = -\frac{1}{3}\sqrt{3} = -\ 0{,}5774$$

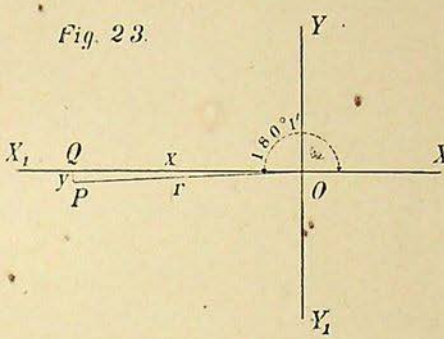
$$\operatorname{cotg} 135^\circ = \frac{x}{y} = \frac{-\frac{1}{2} r \sqrt{2}}{\frac{1}{2} r \sqrt{2}} = -1$$

$$\text{cotg } 150^\circ = \frac{x}{y} = \frac{-\,^1/_2\, r\sqrt{3}}{^1/_2\, r} = -\sqrt{3} = -1{,}7321$$

$$\text{cotg } 180^\circ = \frac{x}{y} = \frac{-r}{o} = -\infty.$$

Doorloopt een hoek het tweede quadrant, dan neemt de cotangens af van 0 tot $-\infty$.

Fig. 23.



We nemen een hoek, iets grooter dan 180°, bijv. 180°1′ (Zie fig. 23).

$\text{cotg } 180^\circ 1' = \frac{x}{y} = \frac{-OQ}{-PQ}$. De waarde van deze verhouding is positief. Daar PQ zeer klein is ten opzichte van OQ, zal $\frac{-OQ}{-PQ}$ een zeer groot getal zijn, dus:

cotg 180°1′ = + een zeer groot getal.

$$\text{cotg } 210^\circ = \frac{x}{y} = \frac{-\,^1/_2\, r\sqrt{3}}{-\,^1/_2\, r} = \sqrt{3} = 1{,}7321.$$

$$\text{cotg } 225^\circ = \frac{x}{y} = \frac{-\,^1/_2\, r\sqrt{2}}{-\,^1/_2\, r\sqrt{2}} = 1$$

$$\text{cotg } 240^\circ = \frac{x}{y} = \frac{-\,^1/_2\, r}{-\,^1/_2\, r\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0{,}5774$$

$$\text{cotg } 270^\circ = \frac{x}{y} = \frac{o}{-r} = 0.$$

Doorloopt een hoek het derde quadrant, dan neemt de cotangens af van ∞ tot 0.

$$\text{cotg } 300^\circ = \frac{x}{y} = \frac{{}^1/_2\, r}{-{}^1/_2\, r\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}\sqrt{3} = 0{,}5774$$

$$\text{cotg } 315^\circ = \frac{x}{y} = \frac{{}^1/_2\, r\sqrt{2}}{-{}^1/_2\, r\sqrt{2}} = -1$$

$$\text{cotg } 330^\circ = \frac{x}{y} = \frac{{}^1/_2\, r\sqrt{3}}{-{}^1/_2\, r} = -\sqrt{3} = -1{,}7321$$

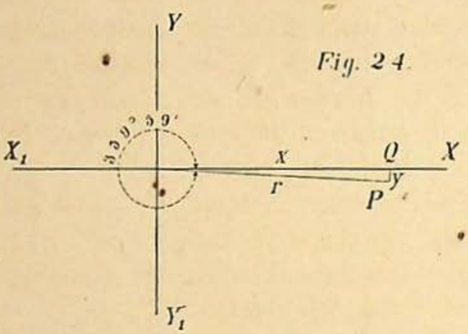


Fig. 24.

We nemen een hoek, iets kleiner dan 360° bijv. 359°59′ (Zie fig. 24).

cotg 359°59′ $= \dfrac{x}{y} = \dfrac{OQ}{-PQ}$. Nu is PQ zeer klein ten opzichte van OQ, dus $\dfrac{OQ}{PQ} =$ een zeer groot getal, waaruit volgt, dat $\dfrac{OQ}{-PQ} =$ een zeer groot negatief getal.

of cotg 359° 59′ = — een zeer groot getal.

Doorloopt een hoek het vierde quadrant, dan neemt de cotangens af van 0 tot —∞.

Opmerkingen: De sinus, de cosinus, de tangens en de cotangens noemt men de vier *goniometrische verhoudingen* van een hoek.

De sinus en de cosinus van een hoek kunnen alleen een waarde hebben van -1 tot en met $+1$.

De tangens en de cotangens van een hoek kunnen alle mogelijke waarden hebben.

§ 6. *Opgaven:* 1.) Van welke hoeken is de sinus positief?

2) Van welke hoeken is de cosinus positief?

3) Van welke hoeken is de tangens positief?

4) Van welke hoeken is de cotangens positief?

5) Van welke hoeken is de sinus negatief?

6) Van welke hoeken is de cosinus negatief?

7) Van welke hoeken is de tangans negatief?

8) Van welke hoeken is de cotangens negatief?

9) In welk quadrant hebben de sinus en de cosinus van een hoek hetzelfde teeken?

10) In welk quadrant hebben de sinus en de cosinus van een hoek tegengesteld teeken?

11) In welk quadrant hebben de sinus en de tangens van een hoek hetzelfde teeken?

12) In welk quadrant hebben de sinus en de tangens van een hoek tegengesteld teeken?

13) In welk quadrant hebben de cosinus en de tangens van een hoek hetzelfde teeken?

14) In welk quadrant hebben de cosinus en de tangens van een hoek tegengesteld teeken?

15) Construeer de hoeken, waarvan de sinus $= \frac{3}{5}$; waarvan de sinus $= -\frac{2}{3}$.

16) Construeer de hoeken, waarvan de cosinus $= \frac{3}{8}$; waarvan de cosinus $= -\frac{3}{5}$.

17) Construeer de hoeken waarvan de tangens $= 2$; waarvan de tangens $= -\frac{1}{2}$.

18) Construeer de hoeken, waarvan de cotangens $= \frac{3}{4}$; waarvan de cotangens $= -1{,}5$.

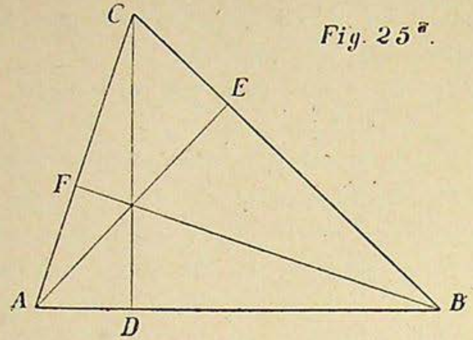


Fig. 25a.

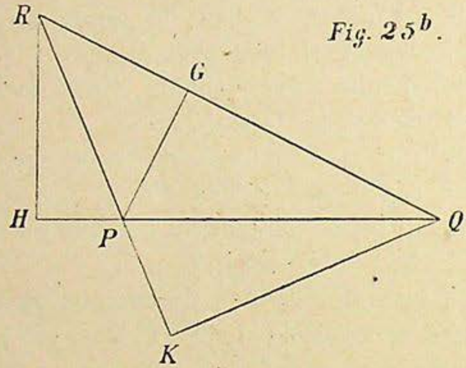


Fig. 25b.

19.) In △ ABC en in △ PQR (zie fig 25a en 25b.) zijn de hoogtelijnen getrokken. Druk uit op twee manieren:

sin A =	sin B =	sin C =
cos A =	cos B =	cos C =
tg A =	tg B =	tg C =
cotg A =	cotg B =	cotg C =
sin P =	sin Q =	sin R =
cos P =	cos Q =	cos R =
tg P =	tg Q =	tg R =
cotg P =	cotg Q =	cotg R =

Fig. 26.ᵃ

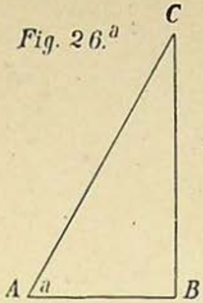
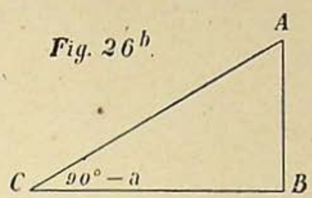


Fig. 26ᵇ.



§ 7. In fig. 26 is de rechthoekige driehoek ABC in twee verschillende standen geteekend,

sin a $= \frac{BC}{AC}$, maar ook cos C = cos (90° — a) $= \frac{BC}{AC}$

cos a $= \frac{AB}{AC}$, maar ook sin C = sin (90° — a) $= \frac{AB}{AC}$

We zien dus, dat *de cosinus van een hoek = de sinus van zijn complement en omgekeerd de sinus van een hoek = de cosinus van zijn complement.*

(Het woord cosinus is dan ook een afkorting van het woord complementssinus)

tg a $= \frac{BC}{AB}$, maar ook cotg C = cotg (90° — a) $= \frac{BC}{AB}$

cotg a $= \frac{AB}{BC}$, maar ook tg C = tg (90° — a) $= \frac{AB}{BC}$

De cotangens van een hoek = de tangens van zijn complement en omgekeerd de tangens van een hoek = de cotangens van zijn complement.

(Het woord cotangens is een afkorting van het woord complementstangens.)

Opgaven :

1) cos 48° 12′ = sin	2) cotg 18° 35′ = tg
cos 74° 19′30″ = sin	cotg 37° 38′20″ = tg
cos 27° 36° 42″ = sin	cotg 67° 19′46″ = tg
sin 25° 18′36″ = cos	tg 37° 17′25″ = cotg
sin 45° 45′45″ = cos	tg 53° 41′31″ = cotg
sin 64° 19′52″ = cos	tg 83° 14′23″ = cotg

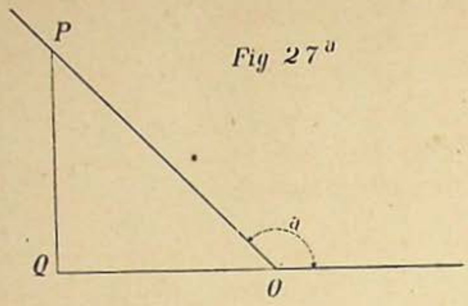
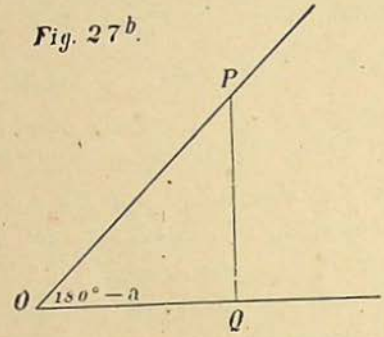


Fig 27^a

Fig. 27^b.



§ 8. In fig. 27 is een hoek a en zijn supplement 180o — a geteekend.

sin a $= \frac{PQ}{OP}$, maar ook sin (180o — a) $= \frac{PQ}{OP}$; dus

sin a = sin (180o — a).

De sinus van een hoek is gelijk aan de sinus van zijn supplement.

cos a $= \frac{-OQ}{OP}$ en cos (180o — a) $= \frac{OQ}{OP}$

dus *cos a = — cos (180o — a).*

De cosinus van een hoek is het tegengestelde van de cosinus van zijn supplement.

tg a $= \frac{PQ}{-OQ}$ en tg (180o — a) $= \frac{PQ}{OQ}$

dus *tg a = — tg (180o — a).*

De tangens van een hoek is het tegengestelde van de ngens van zijn supplement.

$$\text{cotg } a = \frac{-OQ}{PQ} \text{ en cotg } (180^o - a) = \frac{OQ}{PQ}$$

dus *cotg* $a = -$ *cotg* $(180^o - a)$.

De cotangens van een hoek is het tegengestelde van de cotangens van zijn supplement.

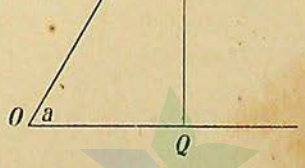
Van deze eigenschappen maakt men gebruik om goniometrische verhoudingen van een stompen hoek te herleiden tot die van een scherpen hoek.

Opgaven:

1) sin 125° 28′ =	cos 132° 19′20″ =
sin 161° 25′10″ =	cos 156° 14′28″ =
sin 170° 10′50″ =	cos 172° 16′30″ =
2) tg 123° 27′45″ =	cotg 104° 37′14″ =
tg 152° 36′30″ =	cotg 163° 35′35″ =
tg 96° 17′24″ =	cotg 173° 16′25″ =

HOOFDSTUK II.

Fig. 28



$$\sin a = \frac{PQ}{OP}, \text{ dus } \sin^2 a = \frac{PQ^2}{OP^2}$$

$$\cos a = \frac{OQ}{OP}, \text{ dus } \cos^2 a = \frac{OQ^2}{OP^2}$$

$$\sin^2 a + \cos^2 a = \frac{PQ^2 + OQ^2}{OP^2} = \frac{OP^2}{OP^2} = 1$$

$$\text{tg } a = \frac{PQ}{OQ} = \frac{PQ/OP}{OQ/OP} = \frac{\sin a}{\cos a}.$$

$$\text{cotg } a = \frac{OQ}{PQ} = \frac{OQ/OP}{PQ/OP} = \frac{\cos a}{\sin a}$$

$$\text{tg } a \times \text{cotg } a = \frac{PQ}{OQ} \times \frac{OQ}{PQ} = 1.$$

We hebben dus de volgende formules:

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1.$

$\text{tg } a = \dfrac{\sin a}{\cos a}$

$\text{cotg } a = \dfrac{\cos a}{\sin a}$

$\text{tg } a \times \text{cotg } a = 1$

Door deze formules zijn we in staat alle goniometrische verhoudingen van een hoek te berekenen, zoodra er slechts één gegeven is.

Voorbeelden:

Geg.: $\sin a = \frac{3}{5}$, terwijl *a* een hoek is in het eerste quadrant.

Gevr.: cos a; tg a en cotg a.

Opl.: $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

$$\frac{9}{25} + \cos^2 a = 1$$

$$\cos^2 a = \frac{16}{25}$$

$\cos a = \frac{4}{5}$ (De waarde $-\frac{4}{5}$ vervalt, daar a een hoek in het eerste quadrant is).

$$\text{tg } a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{cotg } a = \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{4/5}{3/5} = \frac{4}{3}.$$

Geg.: $\sin b = \frac{2}{3}$, terwijl b een hoek in het tweede quadrant is.

Gevr.: cos b; tg b en cotg b.

Oplossing: $\sin^2 b + \cos^2 b = 1$

$$\frac{4}{9} + \cos^2 b = 1$$

$$\cos^2 b = \frac{5}{9}$$

$$\text{os } b = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{1}{3}\sqrt{5}$$ (de waarde $+\frac{1}{3}\sqrt{5}$ rvalt, daar b een hoek in het tweede quadrant is.)

$$\text{tb} = \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{^2/_3}{-\,^1/_3\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{5}\sqrt{5}.$$

$$\text{c b} = \frac{\cos b}{\sin b} = \frac{-\,^1/_3\sqrt{5}}{^2/_3} = -\frac{\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

g.: $\cos p = -\frac{5}{8}$ (p ligt in het tweede quadrant).

vr.: sin p, tg p en cotg p.

.: $\sin^2 p + \cos^2 p = 1$

$$\text{Sin}^2 p + \frac{25}{64} = 1$$

$$\text{Sin}^2 p = \frac{39}{64}$$

$\text{Sin } p = \frac{1}{8}\sqrt{39}$. (de sinus van een hoek in het tweede quad is positief).

$$\text{tg } p = \frac{\sin p}{\cos p} = \frac{^1/_8\sqrt{39}}{-\,^5/_8} = -\frac{\sqrt{39}}{5} = -\frac{1}{5}\sqrt{39}.$$

$$\text{cotg } p = \frac{\cos p}{\sin p} = \frac{-\,^5/_8}{^1/_8\sqrt{39}} = -\frac{5}{\sqrt{39}} = -\frac{5}{39}\sqrt{39}.$$

Geg. g $x = \frac{2}{3}$ (x ligt in het eerste quadrant).

Gevr.: sin x; cos x en cotg x.

Oplossing: $\operatorname{tg} x \times \operatorname{cotg} x = 1$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{{}^2/_3} = \frac{3}{2},$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \text{ dus } \operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}.$$

$$\frac{4}{9} = \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$$

$$4 - 4 \sin^2 x = 9 \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{4}{13},$$

dus $\sin x = \sqrt{\frac{4}{13}} = \frac{2}{13} \sqrt{13}$ en dan vinden e

$\cos x = \frac{3}{13} \sqrt{13}.$

Geg.: $\operatorname{cotg} y = -\frac{4}{5}$ (y ligt in het tweede quadᴵt).

Gevr.: sin y; cos y en tg y.

Opl.: $\operatorname{tg} y \times \operatorname{cotg} y = 1$

$$\operatorname{tg} y = \frac{1}{\operatorname{cotg} y} = \frac{1}{-{}^4/_5} = -\frac{5}{4}$$

$$\operatorname{cotg} y = \frac{\cos y}{\sin y} \text{ dus } \operatorname{cotg}^2 y = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y}$$

$$\frac{16}{25} = \frac{1 - \sin^2}{\sin^2 y}$$

$$16 \sin^2 y = 25 - 25 \sin^2 y$$

$$41 \sin^2 y = 25$$

$\sin y = \sqrt{\frac{25}{41}} = \frac{5}{41} \sqrt{41}$, waaruit gt, dat

$\cos y = -\frac{4}{41} \sqrt{41}.$

Opgaven:

1) $\sin a = \frac{1}{2}$. Bereken de overige goniom. verhoudingen

$\sin a = \frac{5}{6}$ „ „ „ „ „

$\sin a = 0{,}58$ „ „ „ „ „

2) $\cos a = \frac{3}{8}$ „ „ „ „ „

$\cos a = 0{,}576$ „ „ „ „ „

$\cos a = -\frac{1}{2}$ „ „ „ „ „

$\cos a = -0{,}82$ „ „ „ „ „

3) $\operatorname{tg} a = \frac{3}{4}$ „ „ „ „ „

$\operatorname{tg} a = 0{,}694$ „ „ „ „ „

$\operatorname{tg} a = -\frac{5}{3}$ „ „ „ „ „

$\operatorname{tg} a = -0{,}144$ „ „ „ „ „

4) $\operatorname{cotg} a = \frac{7}{9}$ „ „ „ „ „

$\operatorname{cotg} a = 1{,}24$ „ „ „ „ „

$\operatorname{cotg} a = \frac{12}{7}$ „ „ „ „ „

$\operatorname{cotg} a = -0{,}925$ „ „ „ „ „

Sinussen en Tangenten in vier decimalen.

Gr.	Sinus.	D.	Tangens.	D.	Gr.	Sinus.	D.	Tangens.	D.
0	0,0000	175	0,0000	175	45	0,7071	122	1,0000	355
1	0,0175-	174	0,0175-	174	46	0,7193	121	1,0355	369
2	0,0349-	174	0,0349	175	47	0,7314-	117	1,0724-	382
3	0,0523	175	0,0524	175	48	0,7431	116	1,1106	398
4	0,0698-	174	0,0699	176	49	0,7547	113	1,1504-	414
5	0,0872-	173	0,0875-	176	50	0,7660	111	1,1918-	431
6	0,1045	174	0,1051	177	51	0,7771	109	1,2349-	450
7	0,1219-	173	0,1228-	177	52	0,7880	106	1,2799	471
8	0,1392-	172	0,1405	179	53	0,7986	104	1,3270	494
9	0,1564	172	0,1584-	179	54	0,8090	102	1,3764-	517
10	0,1736	172	0,1763	181	55	0,8192-	98	1,4281	545
11	0,1908	171	0,1944-	182	56	0,8290	97	1,4826-	573
12	0,2079	171	0,2126-	183	57	0,8387-	93	1,5399-	604
13	0,2250-	169	0,2309-	184	58	0,8480	92	1,6003	640
14	0,2419	169	0,2493	186	59	0,8572-	88	1,6643-	678
15	0,2588	168	0,2679	188	60	0,8660	86	1,7321-	719
16	0,2756	168	0,2867	190	61	0,8746	83	1,8040	767
17	0,2924-	166	0,3057	192	62	0,8829	81	1,8807	819
18	0,3090	166	0,3249	194	63	0,8910	78	1,9626	877
19	0,3256-	164	0,3443	197	64	0,8988-	75	2,0503	942
20	0,3420	164	0,3640-	199	65	0,9063	72	2,1445	1015
21	0,3584-	162	0,3839-	201	66	0,9135	70	2,2460	1099
22	0,3746	161	0,4040	205	67	0,9205	67	2,3559-	1192
23	0,3907	160	0,4245-	207	68	0,9272-	64	2,4751-	1300
24	0,4067	159	0,4452	211	69	0,9336-	61	2,6051-	1424
25	0,4226	158	0,4663	214	70	0,9397-	58	2,7475-	1567
26	0,4384-	156	0,4877	218	71	9,9455	56	2,9042	1735
27	0,4540-	155	0,5095	222	72	0,9511-	52	3,0777-	1932
28	0,4695-	153	0,5317	226	73	0,9563	50	3,2709-	2165
29	0,4848	152	0,5543	231	74	0,9613-	46	3,4874	2447
30	0,5000	150	0,5774-	235	75	0,9659	44	3,7321-	2787
31	0,5150	149	0,6009-	240	76	0,9703-	41	4,0108-	3207
32	0,5299	147	0,6249-	245	77	0,9744-	37	4,3315-	3731
33	0,5446	146	0,6494	251	78	0,9781	35	4,7046	4400
34	0,5592-	144	0,6745	257	79	0,9816	32	5,1446-	5267
35	0,5736-	142	0,7002	263	80	0,9848	29	5,6713-	6425
36	0,5878-	140	0,7265	271	81	0,9877-	26	6,3138-	8016
37	0,6018	139	0,7536-	277	82	0,9903-	22	7,1154-	1,0289
38	0,6157-	136	0,7813-	285	83	0,9925	20	8,1443	1,3701
39	0,6293	135	0,8098-	293	84	0,9945	17	9,5144-	
40	0,6428-	133	0,8391-	302	85	0,9962-	14	11,430	
41	0,6561-	130	0,8693-	311	86	0,9976-	10	14,301-	
42	0,6691	129	0,9004	321	87	0,9986	8	19,081	
43	0,6820-	127	0,9325	332	88	0,9994-	4	28,636	
44	0,6947-	124	0,9657-	343	89	0,9998	2	57,290-	
45	0,7071		1,0000		90	1,0000		∞	

HOOFDSTUK III.

§ 1. In de tafel op bladz. 28 vindt men de sinussen en de tangenten van de hoeken van 0° tot 90°, opklimmende met één graad.

Zoo vindt men er:

sin 17°	tg 17°
sin 32°	tg 39°
sin 48°	tg 50°
sin 63°	tg 67°
sin 78°	tg 84°

Hoe vindt men nu sin 27° 16′?

Een hoek van 27° 16′ ligt tusschen 27° en 28°. Nu is:

$$\left.\begin{array}{l} \sin 28^\circ = 0.4695 \\ \sin 27^\circ = 0.4540. \end{array}\right\} \text{zie de tafel.}$$

$$\begin{array}{c|c} 1^\circ & 155 \end{array}$$

Een vermeerdering van 1° geeft dus voor de sinus een vermeerdering van 155 tienduizendste deelen, dat is voor elke minuut *gemiddeld* een opklimming met $\frac{155}{60}$ tienduiz. dus voor 16′ een opklimming van $\frac{16}{60} \times 155$ td. $= 41$ td. dus $\sin 27^\circ\ 16' = 0.4540 + 0.0041 = 0.4581$.

Opm. In vorenstaande tafel zijn de goniometrische verhoudingen bepaald tot in 4 decimalen nauwkeurig. We berekenen dus slechts het aantal tienduizendste deelen; wat minder is dan $\frac{1}{2}$ td. wordt verwaarloosd; $\frac{1}{2}$ td. en wat meer is, wordt voor 1 td. in rekening gebracht.

Voorbeelden: Te berekenen: sin 68° 27′.

$$\left.\begin{array}{l} \sin 69^\circ = 0.9336 \\ \sin 68^\circ = 0.9272 \end{array}\right\} \text{zie de tafel}$$

$$\begin{array}{c|l} 1^\circ & 64 \text{ td} \\ 1' & \frac{1}{60} \times 64 \text{ td} \\ 27' & \frac{27}{60} \times 64 \text{ td} = 29 \text{ td.} \end{array}$$

dus $\sin 68^\circ\ 27' = 0.9272 + 0.0029 = 0.9301$.

Te berekenen: tg 38° 42′

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 39^\circ = 0.8098 \\ \text{tg } 38^\circ = 0.7813 \end{array}\right\} \text{Zie de tafel}$$

$$\begin{array}{r|l} 1^\circ & 285 \quad \text{td} \\ 1' & \frac{1}{60} \times 285 \text{ td} \\ 42' & \frac{42}{60} \times 285 \text{ td} = 200 \text{ td} \end{array}$$

dus tg 38°42′ = 0.7813 + 0.0200 = 0.8013.

Te berekenen: tg 73° 46′.

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 74^\circ = 3.4874 \\ \text{tg } 73^\circ = 3.2709 \end{array}\right\} \text{Zie de tafel}$$

$$\begin{array}{r|l} 1^\circ & 2165 \quad \text{td} \\ 1' & \frac{1}{60} \times 2165 \text{ td} \\ 46'' & \frac{46}{60} \times 2165 \text{ td} = 1660 \text{ td} \end{array}$$

dus tg 73° 46′ = 3.4369.

Opgaven:

Bereken:

1)	sin 18° 20′ =	sin 51° 19′ =
	sin 26° 15′ =	sin 62° 17′ =
	sin 32° 27′ =	sin 69° 30′ =
	sin 42° 49′ =	sin 74° 18′ =
	sin 48° 23′ =	sin 80° 20′ =
2)	tg 19° 15′ =	tg 50° 16′ =
	tg 25° 25′ =	tg 55° 28′ =
	tg 36° 29′ =	tg 63° 17′ =
	tg 42° 42′ =	tg 70° 14′ =
	tg 46° 18′ =	tg 75° 37′ =

§ 2. In de tafel is alleen opgenomen een lijst van de sinussen en tangenten der hoeken van 0° tot 90°.

Wil men de cosinus of de cotangens van een scherpen hoek bepalen, dan maakt men gebruik van de eigenschap: De cosinus of de cotangens van een hoek is de sinus of de tangens van zijn complement

Voorbeelden:

Te berekenen: cos 38° 17′.

$\cos 38^\circ 17' = \sin 51^\circ 43'$

$\sin 52^\circ = 0.7880$

$\sin 51^\circ = 0.7771$

1°	109 td
1′	$\frac{1}{60} \times 109$ td
43′	$\frac{43}{60} \times 109$ td $= 78$ td.

dus $\sin 51^\circ 43' = \cos 38^\circ 17' = 0.7849.$

Te berekenen: cotg 57° 12′.

$\mathrm{cotg}\ 57^\circ 12' = \mathrm{tg}\ 32^\circ 48'$

$\mathrm{tg}\ 33^\circ = 0.6494$

$\mathrm{tg}\ 32^\circ = 0.6249$

1°	245 td
1′	$\frac{1}{60} \times 245$ td
48′	$\frac{48}{60} \times 245$ td $= 196$ td.

dus $\mathrm{cotg}\ 57^\circ 12' = \mathrm{tg}\ 32^\circ 48' = 0.6445.$

Opgaven:

Bereken:

1) cos 28° 14′	2) cotg 36° 20′ =
cos 42° 17′	cotg 43° 19′ =
cos 58° 30′	cotg 53° 26′ =
cos 64° 38′	cotg 61° 18′ =
cos 71° 24′	cotg 70° 25′ =

§ 3. Heeft men een goniometrische verhouding van een stompen hoek te berekenen, dan brengt men die door de eigenschappen, die we geleerd hebben, terug tot de sinus of de tangens van een scherpen hoek, bijv.:

$\sin 125^\circ 18' = \sin 54^\circ 42'$
$\sin 153^\circ 20' = \sin 26^\circ 40'$
$\cos 134^\circ 16' = -\cos 45^\circ 44' = -\sin 44^\circ 16'$
$\cos 148^\circ 30' = -\cos 31^\circ 30'' = -\sin 58^\circ 30$
$\operatorname{tg} 115^\circ 56' = -\operatorname{tg} 64^\circ 4'$
$\operatorname{tg} 127^\circ 43' = -\operatorname{tg} 52^\circ 17'$
$\operatorname{cotg} 132^\circ 40' = -\operatorname{cotg} 47^\circ 20' = -\operatorname{tg} 42^\circ 40'$
$\operatorname{cotg} 162^\circ 49' = -\operatorname{cotg} 17^\circ 11' = -\operatorname{tg} 72^\circ 49'$

Opgaven: Bereken:

1) $\sin 124^\circ 16' =$
$\sin 153^\circ 32' =$
$\sin 160^\circ 40' =$

2) $\cos 134^\circ 34' =$
$\cos 112^\circ 19' =$
$\cos 152^\circ 18' =$

3) $\operatorname{tg} 131^\circ 31' =$
$\operatorname{tg} 144^\circ 44' =$
$\operatorname{tg} 162^\circ 25' =$

4) $\operatorname{cotg} 97^\circ 24' =$
$\operatorname{cotg} 128^\circ 16' =$
$\operatorname{cotg} 154^\circ 36' =$

§ 4. Hoe zoekt men nu een hoek, als een zijner goniometrische verhoudingen bekend is?

Bijv. $\sin x = 0.7908$. Hoe groot is x?

In de tafel vindt men: $\sin 52^\circ = 0.7880$ en $\sin 53^\circ = 0.7986$, dus x ligt tusschen 52° en 53° terwijl $\sin x$ 28 tienduizendsten meer is dan $\sin 52^\circ$.

$$
\begin{array}{r|l}
0.7986 = & \sin 53^\circ \\
0.7880 = & \sin 52^\circ \\
\hline
106 & 60' \\
28 & \frac{28}{106} \times 60' = 16'
\end{array}
$$

dus $0.7908 = \sin 52^\circ 16'$ of $\sin 127^\circ 44'$, want een hoek en zijn supplement hebben dezelfde sinus.

Voorbeelden :

$$\sin x = 0.4052$$

$$\left.\begin{array}{l} 0.4067 = \sin 24^\circ \\ 0.3907 = \sin 23^\circ \end{array}\right\} \quad 0.4052 - 0.3907 = 145 \text{td}$$

$$\begin{array}{l|l} 160 \text{ td} & 60' \\ 145 \text{ td} & \dfrac{145}{160} \times 60' = 54' \end{array}$$

$$\text{dus } x = 23^\circ\ 54' \text{ of } 156^\circ\ 6'.$$

$$\text{tg } x = 1{,}4000$$

$$\left.\begin{array}{l} 1.4281 = \text{tg } 55^\circ \\ 1.3764 = \text{tg } 54^\circ \end{array}\right\} \quad 1.4000 - 1.3764 = 236 \text{ td}$$

$$\begin{array}{l|l} 517 & 60' \\ 236 & \dfrac{236}{517} \times 60' = 27' \\ & \text{dus } x = 54^\circ\, 27'. \end{array}$$

$$\text{tg } x = -0.8927$$

$$\text{dus tg } (180^\circ - x)\ 0.8927$$

$$\left.\begin{array}{l} 0.9004 = \text{tg } 42^\circ \\ 0.8693 = \text{tg } 41^\circ \end{array}\right\} \quad 0.8927 - 0{,}8693 = 234 \text{td}.$$

$$\begin{array}{l|l} 311 & 60' \\ 234 & \dfrac{234}{311} \times 60' = 45' \end{array}$$

$$180^\circ - x = 41^\circ\ 45' \text{ dus } x = 138^\circ\, 15'$$

$$\cos x = 0.8256 \text{ of } \sin (90^\circ - x) = 0.8256.$$

$$\left.\begin{array}{l} 0.8290 = \sin 56^\circ \\ 0.8192 = \sin 55^\circ \end{array}\right\} \quad 0.8256 - 0.8192 = 64 \text{ td}.$$

$$\begin{array}{l|l} 98 \text{ td} & 60' \\ 64 \text{ td} & \dfrac{64}{98} \times 60' = 39' \end{array}$$

$$90^\circ - x = 55^\circ\ 39', \text{ dus } x = 34^\circ\ 21'$$

$$\cos x = -0.9102$$

$$\cos (180^\circ - x) = 0.9102 \text{ dus}$$

$$\sin (90^\circ - 180^\circ + x) = \sin (x - 90^\circ) = 0.9102.$$

$$\left.\begin{array}{l} 0.9135 = \sin 66^\circ \\ 0.9063 = \sin 65^\circ \end{array}\right\} \; 0.9102 - 0.9063 = 39 \text{ td.}$$

$$\begin{array}{r|l} 72 \text{ td} & 60' \\ 39 \text{ td} & \dfrac{39}{72} \times 60' = 33' \end{array}$$

dus $x - 90^\circ = 65^\circ\, 33'$

$x = 155^\circ\, 33'$

$\operatorname{cotg} x = 0.8000$

$\operatorname{tg} (90^\circ - x) = 0.8000$

$$\left.\begin{array}{l} 0.8098 = \operatorname{tg} 39^\circ \\ 0.7813 = \operatorname{tg} 38^\circ \end{array}\right\} \; 0.8000 - 0.7813 = 187 \text{ td}$$

$$\begin{array}{r|l} 285 \text{ td} & 60' \\ 187 \text{ td} & \dfrac{187}{285} \times 60' = 39' \end{array}$$

$90^\circ - x = 38^\circ\, 39'$

dus $x = 51^\circ\, 21'$

$\operatorname{cotg} x = -\ 1{,}4580$

$\operatorname{cotg} (180^\circ - x) = 1{,}4580$ dus $\operatorname{tg} (90^\circ - 180^\circ + x) =$
$\operatorname{tg} (x - 90^\circ) = 1{,}4580$

$$\left.\begin{array}{l} 1.4826 = \operatorname{tg} 56^\circ \\ 1.4281 = \operatorname{tg} 55^\circ \end{array}\right\} \; 1.4580 - 1.4281 = 299 \text{ td}$$

$$\begin{array}{r|l} 545 \text{ td} & 60' \\ 299 \text{ td} & \dfrac{299}{545} \times 60' = 33' \end{array}$$

$x - 90^\circ = 55^\circ\, 33'$

$x = 145^\circ\, 33'$

Opgaven:

Bereken x, als gegeven is:

1) $\sin x = 0.3148$
   $\sin x = 0{,}6124$
   $\sin x = 0{,}7203$
   $\sin x = 0{,}8246$
   $\sin x = 0{,}9000$

2) $\cos x = 0{,}2690$
   $\cos x = 0{,}8629$

cos x = — 0,6000
cos x = — 0,3428
cos x = 0,1094
3) tg x = 0,3456
tg x = 0,9274
tg x = 2,0864
tg x = — 0,9009
tg x = — 1,8000
4) cotg x = 1,4728
cotg x = 0,5962
cotg x = 3,1416
cotg x = — 0,8142
cotg x = — 2,500.

§ 5. In een afzonderlijke tafel zijn opgenomen de logarithmen van de goniómetrische verhoudingen der hoeken van het eerste quadrant, opklimmende met 1 minuut.

In de eerste kolom zijn vermeld de hoeken, in de andere kolommen de logarithmen van de sinus, van de tangens, van de cotangens en van de cosinus, hetgeen boven elke kolom vermeld is.

Opmerking: De logarithme van een goniometrische verhouding van een hoek is altijd geschreven met den wijzer — 10, dus voor log. sin 37° 42′ = 0.78642 — 1 schrijft men 9.78642 — 10. In de tafel is de negatieve wijzer — 10 weggelaten.

In de eerste kolom loopen de hoeken van 0° tot 45°. Hoe nu te handelen als men de logarithme van een goniometrische verhouding van een hoek boven 45) moet bepalen?

Zij gevraagd log. sin 52° 16′.

log sin 52° 16′ = log cos 37° 44′ = 9.89810 (Zie tafel;
Zoo is log cos 63° 14′ = log sin 26° 46′ = 9.65356 („ „)
log tg 70° 30′ = log cotg 19° 30′ = 10.45085 („ „)
log cotg 48° 17′ = log tg 41° 43′ = 9.95012 („ „)

Om te voorkomen dat men bij hoeken boven 45° steeds het complement zelf moet berekenen, heeft men als laatste kolom op elke bladzijde van de tafel de hoeken opgegeven, die het complement zijn van die der eerste kolom en de logarithme van de goniometrische verhoudingen ervan heeft men aan den voet der bladzijde opgenomen.

Voorbeelden:

Gevraagd: log sin 39° 16′ 42″.

$$\begin{array}{l} \log \sin 39^\circ 17' = 9.80151 - 10 \\ \log \sin 39^\circ 16' = 9.80136 - 10 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 60'' & 15 \text{ hd} \\ 1'' & 0.25 \text{ hd} \\ 42'' & 42 \times 0.25 \text{ hd} = 11 \text{ hd.} \end{array}$$

dus log sin 39° 16′ 42″ = 9.80147 — 10

Gevr. log tg 54° 36′ 47″.

$$\begin{array}{l} \log \operatorname{tg} 54^\circ 37' = 10.14860 - 10 \\ \log \operatorname{tg} 54^\circ 36' = 10.14834 - 10 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 60'' & 26 \text{ hd} \\ 1'' & 0.43 \text{ hd} \\ 47'' & 47 \times 0.43 \text{ hd} = 20 \text{ hd} \end{array}$$

dus log tg 54° 36′ 47″ = 10.14854 — 10.

Opmerking: Als een hoek in het eerste quadrant *aangroeit*, neemt zijn *cosinus en zijn cotangens* af, dus ook de *log cos* en *de log cotg.*

Gevraagd: log cos 49° 17′ 35″

$$\begin{array}{l} \log \cos 49^\circ 18' = 9.81431 - 10 \\ \log \cos 49^\circ 17' = 9.81446 - 10 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 60'' & -15 \text{ hd} \\ 1'' & -0.25 \text{ hd} \\ 35'' & 35 \times -0.25 \text{ hd} = -9 \text{ hd} \end{array}$$

dus log cos 49° 17′ 35″ = 9.81437 — 10.

Gevraagd: log cotg 59° 58′ 33″

$$\begin{array}{l} \log \operatorname{cotg} 59^\circ 59' = 9.76173 - 10 \\ \log \operatorname{cotg} 59^\circ 58' = 9.76202 - 10 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 60'' & -29 \text{ hd} \\ 1'' & -0.48 \text{ hd} \\ 33'' & 33 \times -0.48 \text{ hd} = -16 \text{ hd} \end{array}$$

dus log cotg $59^\circ\ 58'\ 33'' = 9.76186 - 10$

Opgaven: Bepaal:

log sin $25^\circ\ 17'\ 16'' =$
log sin $42^\circ\ 18'\ 47'' =$
log sin $59^\circ\ 25'\ 27'' =$
log sin $71^\circ\ 19'\ 35'' =$
log cos $29^\circ\ 15'\ 48'' =$
log cos $39^\circ\ 47'\ 12'' =$
log cos $57^\circ\ 12'\ 49'' =$
log cos $69^\circ\ 58'\ 18'' =$
log tg $31^\circ\ 17'\ 41'' =$
log tg $42^\circ\ 25'\ 36'' =$
log tg $61^\circ\ 19'\ 22'' =$
log tg $74^\circ\ 36'\ 46'' =$
log cotg $18^\circ\ 19'\ 20'' =$
log cotg $39^\circ\ 20'\ 40'' =$
log cotg $51^\circ\ 19'\ 36'' =$
log cotg $70^\circ\ 10'\ 50'' =$

§ 6. Bepaling van den hoek, als de logarithme van één zijner goniometrische verhoudingen gegeven is.

log sin x $= 9.80248 - 10$

$$\left.\begin{array}{l} 9.80259 - 10 = \log \sin 39^\circ\ 24' \\ 9.80244 - 10 = \log \sin 39^\circ\ 23' \end{array}\right\} \text{Zie de tafel}$$

$$\begin{array}{r|l} 15\text{hd} & 60'' \\ 4\text{hd} & \frac{4}{15} \times 60'' = 16'' \end{array}$$

dus $x = 39^\circ\ 23'\ 16''$ of $140^\circ\ 36'\ 44''$ (want een hoek heeft dezelfde sinus als zijn supplement).

log cos $x = 9.79406 - 10$

$$\begin{array}{l} 9.79399 - 10 = \log \cos 51^\circ\ 31' \\ 9.79415 - 10 = \log \cos 51^\circ\ 40' \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -16\text{hd} & 60'' \\ -9\text{hd} & \frac{9}{16} \times 60'' = 34'' \end{array}$$

dus $x = 51^\circ\ 30'\ 34''$.

$$
\begin{array}{l}
\log \operatorname{tg} x = 10{,}04520 - 10 \\
10.04531 - 10 = \log \operatorname{tg} 47^\circ\ 59' \\
10.04505 - 10 = \log \operatorname{tg} 47^\circ\ 58' \\
\hline
\begin{array}{r|l}
26\text{hd} & 60'' \\
15\text{hd} & \dfrac{15}{26} \times 60'' =
\end{array}
\end{array}
$$

dus $x = 47^\circ\ 58'\ 35''$

$$
\begin{array}{l}
\log \operatorname{cotg} x = 9.93060 - 10 \\
9.93048 - 10 = \log \operatorname{cotg} 49^\circ\ 34 \\
9.93073 - 10 = \log \operatorname{cotg} 49^\circ\ 33 \\
\hline
\begin{array}{r|l}
-25\ \text{hd} & +60'' \\
-13\ \text{hd} & \dfrac{13}{25} \times 60'' = 31
\end{array}
\end{array}
$$

dus $x = 49^\circ\ 33'\ 31''$

Opgaven: Bepaal x, als:

$\log \sin x = 8.75834 - 10$
$\log \sin x = 9.41925 - 10$
$\log \sin x = 9.70772 - 10$
$\log \sin x = 9.82030 - 10$
$\log \sin x = 9.88152 - 10$
$\log \sin x = 9.96769 - 10$
$\log \cos x = 9.98586 - 10$
$\log \cos x = 9.93157 - 10$
$\log \cos x = 9.87112 - 10$
$\log \cos x = 9.84520 - 10$
$\log \cos x = 9.76000 - 10$
$\log \cos x = 9.61112 - 10$
$\log \operatorname{tg} x = 9.45010 - 10$
$\log \operatorname{tg} x = 9.73609 - 10$
$\log \operatorname{tg} x = 9.94842 - 10$
$\log \operatorname{tg} x = 10.04437 - 10$
$\log \operatorname{tg} x = 10.29961 - 10$
$\log \operatorname{tg} x = 10.44308 - 10$
$\log \operatorname{cotg} x = 10.54698 - 10$
$\log \operatorname{cotg} x = 10.27486 - 10$
$\log \operatorname{cotg} x = 10.04775 - 10$

$$\log \operatorname{cotg} x = 9.94416 - 10$$
$$\log \operatorname{cotg} x = 9.77350 - 10$$
$$\log \operatorname{cotg} x = 9.61663 - 10$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{518,76}}{5,103^2}$$

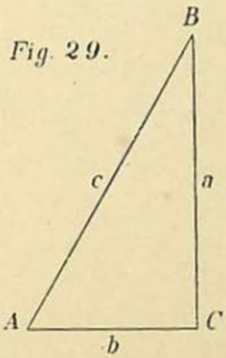
$$\cos x = \sqrt[3]{\frac{15,732^2}{\sqrt{94000}}}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{0.82734 \times 9,4272}{14,73 \times \sqrt{0.54}}$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\sqrt{5,2} \times \sqrt[3]{10}}{3.9842}$$

HOOFDSTUK IV.

Fig. 29.



△ ABC is rechthoekig in C. (Zie fig. 29).
AB = c; AC = b en BC = a.

$$\frac{a}{c} = \sin A \qquad\qquad \frac{b}{c} = \sin B$$
$$\times c \qquad\qquad \times c$$
$$a = c \sin A \qquad\qquad b = c \sin B.$$

$$\frac{b}{c} = \cos A \qquad\qquad \frac{a}{c} = \cos B$$
$$\times c \qquad\qquad \times c$$
$$b = c \cos A \qquad\qquad a = c \cos B.$$

Eigenschap I: In een rechthoekigen driehoek is *een rechthoekszijde gelijk aan de hypothenusa maal de sinus van den overstaanden hoek of maal de cosinus van den aanliggenden hoek.*

$\frac{a}{b}$ tg A $\qquad\qquad$ $\frac{b}{a} =$ tg B

———— b $\qquad\qquad$ ———— a

a = b. tg A $\qquad\qquad$ b = a. tg B.

$\frac{b}{a} =$ cotg A $\qquad\qquad$ $\frac{a}{b} =$ cotg B

———— a $\qquad\qquad$ ———— b

b = a cotg A $\qquad\qquad$ a = b cotg B

Eigenschap II: In een rechthoekigen driehoek is *een rechthoekszijde gelijk aan de andere rechthoekszijde maal de tangens van den overstaanden hoek of maal de cotangens van den aanliggenden hoek.*

Deze twee goniometrische eigenschappen van den rechthoekigen driehoek zijn voldoende, om in een rechthoekigen driehoek, waarvan behalve de rechte hoek nog twee elementen gegeven zijn, de onbekende elementen te berekenen.

Voorbeeld I: *Geg.*: (Zie fig. 29) c = 58,72.
A = $56^{o}\,14'32''$

Gevraagd: De overige elementen.

Oplossing:

B = $90^{o} - 56^{o}\ 14'\ 32'' = 33^{o}\ 45'\ 28''$

a = c. sin A.

log a = log c + log sin A.

log c = 1.76879

log sin A = 9.91981 — 10

———————— +

log a = 1.68860

a = 48,82

b = c. cos A.

log b = log c + log cos A

log c = 1.76879

log cos A = 9.74483 — 10

———————— +

log b = 1.51362

b = 32.63

Voorbeeld II: *Geg*. (Zie fig. 29).

$a = 18,732$; $B = 37^\circ\ 49'\ 12''$

Gevraagd: De overige elementen.

Oplossing: $A = 90^\circ - 37^\circ\ 49'\ 12'' = 52^\circ\ 10'\ 48''$

$b = a \operatorname{tg} B$

$\log b = \log a + \log \operatorname{tg} B.$

$$\begin{array}{r} \log a = 1,27259 \\ \log \operatorname{tg} B = 9,88999 - 10 \\ \hline \log b = 1,16258 \end{array} +$$

$b = 14,541$

$a = c. \cos B$

$a = \dfrac{a}{\cos B}$ dus $\log c = \log a - \log \cos B.$

$$\begin{array}{r} \log a = 1,27259 \\ \log \cos B = 9.89759 - 10 \\ \hline \log c = 1.37500. \end{array} -$$

$c = 23.714$

Voorbeeld III: Geg. (Zie fig. 29).
$a = 274,6$; $b = 180,8$.

Gevraagd: De overige elementen.

Oplossing: Daar de vorm, waarin de stelling van PYTHAGORAS geschreven wordt, niet logarithmisch is, passen we deze stelling in de trigonometrie liever niet toe.

$a = b \operatorname{tg} A$ of $\operatorname{tg} A = \dfrac{a}{b}$

$\log \operatorname{tg} A = \log a - \log b.$

$$\begin{array}{r} \log a = 2.43870 \\ \log b = 2.25720 \\ \hline \log \operatorname{tg} A = 10.18150 - 10 \end{array} -$$

$A = 56^\circ\ 38'\ 18''$

dus $B = 90^\circ - 56^\circ\ 38'\ 18'' = 33^\circ\ 21'\ 42''$

$a = c \sin A.$

$c = \dfrac{a}{\sin A.}$

$$\log c = \log a - \log \sin A$$
$$\log a = 2.43870$$
$$\log \sin A = 9.92180 - 10$$
$$\overline{\log c = 2.51690} \; -$$
$$c = 328{,}78.$$

Voorbeeld IV: (Zie fig. 29).

Geg.: $b = 0.5724$

$c = 0.8296$

Gevraagd: De overige elementen.

Oplossing: $b = c \cos A$

$$\cos A = \frac{b}{c}$$

$$\log \cos A = \log b - \log c.$$
$$\log b = 0.75770 - 1$$
$$\log c = 0.91887 - 1$$
$$\overline{\log \cos A = 9.83883 - 10} \; -$$
$$A = 46^\circ\, 22'\, 18''$$

dus $B = 43^\circ\, 37'\, 42''$

$$a = c \sin A$$
$$\log a = \log c + \log \sin A$$
$$\log c = 0.91887 - 1$$
$$\log \sin A = 9.85964 - 10$$
$$\overline{\log a = 0.77851 - 1} \; +$$
$$a = 0{,}6005.$$

Opmerking: Berekeningen in een gelijkbeenigen driehoek of in een gelijkbeenig trapezium worden ook meestal uitgevoerd door toepassing van de trigonometrische eigenschappen van den rechthoekigen driehoek.

Opgaven: 1). Van een rechthoekigen driehoek ABC is de hypothenusa AB = 1.05 M. en ∟ A = 49° 48′ 25″. Bereken de rechthoekszijden AC en BC.

2). Van een rechthoekigen driehoek is de hypothenusa 35,84 M. en één der scherpe hoeken 26° 26′ 30″. Bereken de rechthoekszijden.

3). Van een rechthoekigen driehoek is een rechtshoekszijde 18,76 d. M. en de overstaande hoek 51° 50′ 20″. Bereken de hypothenusa en de andere rechthoekszijde.

4). Van een rechthoekigen driehoek is een der rechthoekszijden 83,4 M. en de aanliggende scherpe hoek 61° 14′ 28″. Bereken de hypothenusa en de andere rechthoekszijde.

5). Van een rechthoekigen driehoek is de hypothenusa 524,56 M. en het verschil der scherpe hoeken 11° 17′ 20″. Bereken de scherpe hoeken en de rechthoekszijden.

6). Een rechthoekszijde van een rechthoekigen driehoek is 18 cM. terwijl de grootste scherpe hoek op 6° 5′ na het dubbele is van den anderen scherpen hoek. Bereken de scherpe hoeken, de hypothenusa en de onbekende rechthoekszijde.

7). De rechthoekszijden van een rechthoekigen driehoek zijn 12,87 en 17,45 cM. Hoe groot zijn de scherpe hoeken en hoe lang is de hypothenusa?

8). De hypothenusa van een rechthoekigen driehoek bedraagt 125 M, een der rechthoekszijden 85,87 M. Hoe groot zijn de scherpe hoeken en hoe lang is de hypothenusa?

9). Een ladder, lang 12 M, staat tegen een muur en reikt juist tot den bovenkant van den muur, terwijl de hoek, dien de ladder met den muur maakt 35° 17′ bedraagt. Hoe hoog is de muur?

10). De rechthoekszijden van een rechthoekigen driehoek verhouden zich als 3 : 4. Hoe groot zijn de scherpe hoeken?

11). De hypothenusa van een rechthoekigen driehoek verhoudt zich tot een der rechthoekszijden als 25 : 18. Hoe groot is de kleinste hoek?

13). Van een gelijkbeenigen driehoek is een been 38,72 M en een hoek aan de basis 49° 16′ 15″. Bereken de hoogte en de basis.

13). Het been van een gelijkbeenigen driehoek bedraagt 0,947 M en de tophoek 37° 12′ 48″. Bereken de hoogte en de basis.

14). Van een gelijkbeenigen driehoek is de basis 72, 724 M en een been 86,276 M. Hoe groot zijn de hoeken?

15). Van een rechthoekigen driehoek is een rechthoekszijde 12 cM. en de projectie van deze rechthoekszijde op de hypothenusa 8 cM. Bereken de onbekende elementen van den driehoek.

16). In een rechthoekigen driehoek is een rechthoekszijde 27,84 M en de loodlijn uit het hoekpunt van den rechten hoek op de hypothenusa neergelaten 18,92 M. Bereken de onbekende elementen van den driehoek.

17). De stukken waarin de hypothenusa van een rechthoekigen driehoek verdeeld wordt door de loodlijn uit het hoekpunt van den rechten hoek op de hypothenusa neergelaten, zijn 8,74 en 12,96 dM. Bereken de rechthoekszijden en de hoeken van den driehoek.

18). Van een gelijkbeenig trapezium zijn de evenwijdige zijden 28,14 en 15,82 dM. Een hoek aan de basis is 69° 14′ 38″. Hoe lang is het been?

19). Van een gelijkbeenig trapezium is de basis 0,974 M, een been 0.378 M en de hoek aan de basis 59° 40′ 48″. Hoe lang is de tweede evenwijdige zijde?

20). De evenwijdige zijden van een gelijkbeenig trapezium zijn 82,746 en 57,482, terwijl het been 29,89 bedraagt. Hoe groot is een hoek aan de basis?

21). De straal van een cirkel M is 8,95 dM. De boog van den sector A M B bevat 100°. Hoe lang is koorde AB?

22). Koorde AB van cirkel M is 7 cM lang, terwijl ∟ A M B = 48° 48′ 48″. Hoe lang is de straal van den cirkel?

23). De straal van een cirkel is 36,5 cM. Hoe lang is de zijde van den regelmatigen ingeschreven 9-hoek?

24). De straal van een cirkel is 50,85 cM. Hoe lang is de zijde van den omgeschreven regelmatigen 18-hoek?

25). De zijde van een regelmatigen 15 hoek is 3 M. Hoe lang is de straal van den omgeschreven cirkel en die van den ingeschreven cirkel?

26). Onder welken hoek snijden twee lichaamsdiagonalen van een kubus elkander?

27). Welken hoek maakt een opstaande ribbe van een regelmatig viervlak met het grondvlak?

28). Bereken den standhoek tusschen twee vlakken van een regelmatig viervlak.

29). Bereken den standhoek tusschen twee vlakken van een regelmatig achtvlak.

30). De ribbe van het grondvlak van een regelmatige driezijdige pyramide is 12 cM., de opstaande ribbe bedraagt 20 cM.

Hoe groot is de hoek, dien de opstaande ribbe maakt met het grondvlak en hoe groot de hoek, dien een opstaand zijvlak maakt met het grondvlak?

31). Van een driezijdige pyramide ABCT is de hoogte 5,25 cM. de opstaande ribbe TA = 7,94 M, terwijl $\angle$ TAB = 67°42′30″.

Hoe groot is de standhoek op de ribbe AB?

32). Van een rechthoekigen driehoek is het verschil van de stukken, waarin de hoogtelijn op de hypothenusa deze verdeelt, 12,38 cM., terwijl die hoogtelijn zelf 16,4 cM is.

Bereken de elementen van den driehoek.

33). Uit den top van een gelijkzijdigen driehoek zijn twee lijnen getrokken, die den driehoek in drie gelijke deelen verdeelen. Bereken de deelen van den tophoek.

34). Hoe lang is de parallelcirkel op een breedte van 51°?

35). Van een cirkelsegment is de koorde 16 cM. en de pijl 4 cM. Bereken de lengte van den boog.

36). Een wiel M heeft een diameter van 18 dM., een wiel N een diameter van 5 dM. De afstand M N bedraagt 15 dM. Om deze wielen is een drijfriem gelegd. Hoe lang is deze drijfriem?

HOOFDSTUK V.

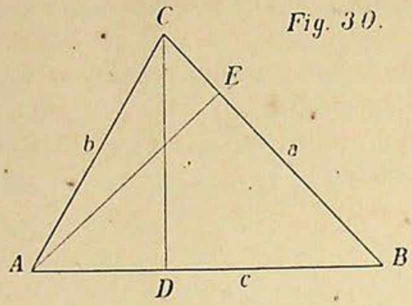


Fig. 30.

§ 1. In $\triangle$ ABC zijn de hoogtelijnen CD en AE getrokken
In $\triangle$ ACD is $CD = b \sin A$
In $\triangle$ BCD is $CD = a \sin B$
Hieruit volgt: $a \sin B = b \sin A$

of $a : \sin A = b : \sin B$ of $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ (I)

In $\triangle$ ABE is $AE = c \sin B$
In $\triangle$ ACE is $AE = b \sin C$
Hieruit volgt, dat $b \sin C = c \sin B$.

of $b : \sin B = c : \sin C$ of $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ (II)

Uit (I) en (II) vindt men:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Sinusregel: *In een willekeurigen driehoek zijn de zijden evenredig met de sinussen der overstaande hoeken.*

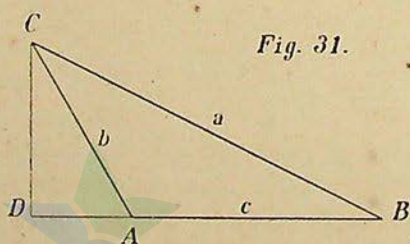


Fig. 31.

De sinusregel geldt ook voor een stomphoekigen driehoek. In den stomphoekigen driehoek ABC (Zie fig. 31) is de hoogtelijn CD getrokken.

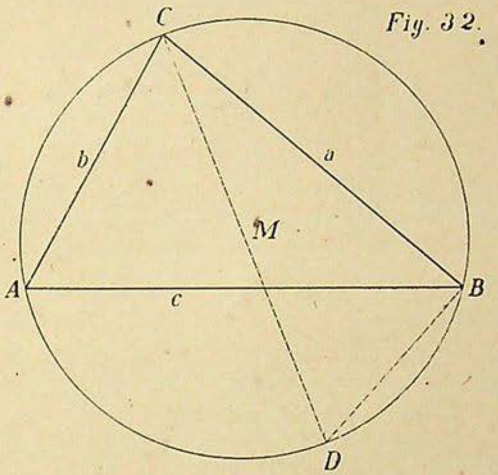
In $\triangle$ ACD is CD = b. sin DAC = b sin A (want de sinus van een hoek is gelijk aan de sinus van zijn supplement).

In $\triangle$ BCD is CD = a sin B.

We vinden dus weer: a sin B = b sin A of

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Fig. 32.



Opmerking I: Om $\triangle$ ABC (Zie fig. 32) is cirkel M beschreven. Hierin trekken we de middellijn CD, dan is $\angle$ CBD = 90° en $\angle$ D = $\angle$ A (= $^1/_2$ bg BC).

In $\triangle$ CBD is BC = CD sin D of a = 2 R sin A dus

$\frac{a}{\sin A} = 2$ R, maar dan is ook

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2 \text{ R}.$$

De waarde van elk der quotienten, voorkomende in den sinusregel, is dus gelijk aan de middellijn van den omgeschreven cirkel van den driehoek.

Opmerking II: De sinusregel wordt bij berekeningen toegepast, als onder de gegevens voorkomen: een zijde en de overstaande hoek.

Opmerking III: Zijn van een driehoek gegeven twee zijden en de hoek tegenover één dezer zijden, dan voldoen er twee driehoeken, wanneer de zijde tegenover den gegeven hoek de kleinste der twee gegeven zijden is.

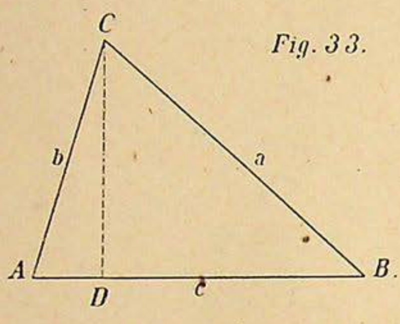


Fig. 33.

In $\triangle$ ABC (Zie fig. 33) is CD $\perp$ AB getrokken.

$$O = \frac{1}{2}\, c \times CD.$$

Maar in $\triangle$ ADC is $CD = b \sin A$

dus $O = \frac{1}{2}\, c \times b \sin A = \frac{1}{2}\, bc \sin A.$

Eigenschap: *De oppervlakte van een driehoek is gelijk aan het halve product van twee zijden maal de sinus van den ingesloten hoek.*

Uit deze eigenschap kan men afleiden, dat de oppervlakte van een parallelogram gelijk is aan het product van de twee zijden maal de sinus van een der hoeken.

Voorbeeld I: *Geg.*: $a = 25{,}84$; $B = 63^\circ\, 17'\, 24''$; $C = 51^\circ\, 38'\, 42''$.

Gevraagd: De overige elementen.

Oplossing: $A = 180^\circ - (63^\circ\, 17'\, 24'' + 51^\circ\, 38'\, 42'') = 65^\circ\, 3'\, 54''$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \text{ dus } b = \frac{a \sin B}{\sin A}$$

$\log b = \log a + \log \sin B - \log \sin A$

$$\begin{array}{rl} \log a = & 1,41229 \\ \log \sin B = & 9,95099 - 10 \\ \hline & 11,36328 - 10 \quad + \\ \log \sin A = & 9,95750 - 10 \\ \hline \log b = & 1,40578 \quad - \\ b = & 25,455 \end{array}$$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \text{ of } c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

$\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A.$

$$\begin{array}{rl} \log a = & 1,41229 \\ \log \sin C = & 9,89442 - 10 \\ \hline & 11,30671 - 10 \quad + \\ \log \sin A = & 9,95750 - 10 \\ \hline \log c = & 1,34921 \quad - \\ c = & 22,347. \end{array}$$

Voorbeeld II. Geg.: $a = 76,49$; $b = 67,52$; $A = 67^\circ\ 18'\ 30''$
Gevraagd: De overige elementen.
Oplossing:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \text{ waaruit } \sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

$\log \sin B = \log b + \log \sin A - \log a$

$$\begin{array}{rl} \log b = & 1,82943 \\ \log \sin A = & 9,96501 - 10 \\ \hline & 11,79444 - 10 \quad + \\ \log a = & 1,88360 \\ \hline \log \sin B = & 9,91084 - 10 \quad - \end{array}$$

$B = 54^\circ\ 31'\ 40''$ of $125^\circ\ 28'\ 20''$.

De tweede waarde van B voldoet niet, want daar $b < a$, moet $B < A$ zijn, dus kleiner dan $67^\circ\ 18'\ 30''$, wat trouwens vooruit gezegd had kunnen worden; er voldoet namelijk slechts één driehoek aan de vraag omdat tegenover den gegeven hoek de grootste der gegeven zijden ligt.

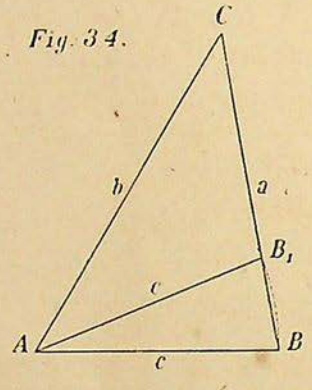
$C = 180^\circ - (67^\circ\ 18'\ 30'' + 54^\circ\ 31'\ 40'') = 58^\circ\ 9'\ 50''$

$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$, waaruit: $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$.

$\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A.$

$$\begin{array}{rl} \log a = & 1{,}88360 \\ \log \sin C = & 9{,}92920-10 \\ \hline & 11{,}81280-10 \quad + \\ \log \sin A = & 9{,}96501-10 \\ \hline \log c = & 1{,}84779 \quad - \\ c = & 70{,}435 \end{array}$$

Fig. 34.



Voorbeeld III: *Geg.*: $b = 0{,}905$; $c = 0{,}758$; $C = 48^\circ\ 16'\ 26''$

Gevraagd: De overige elementen.

Oplossing: $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$, waaruit volgt $\sin B = \frac{b \sin C}{c}$

$\log \sin B = \log b + \log \sin C - \log c.$

$$\begin{array}{rl} \log b = & 0{,}95665 - 1 \\ \log \sin C = & 9{,}87293 - 10 \\ \hline & 10{,}82958 - 11 \quad + \\ \log c = & 0{,}87967 - 1 \\ \hline \log \sin B = & 9{,}94991 - 10 \quad - \end{array}$$

$B = 63^\circ\ 0'\ 26''$ of $116^\circ\ 59'\ 34''$.

Daar $b > c$, moet $B > C$ zijn. Beide waarden voor B voldoen dus, zoodat er twee driehoeken aan de vraag voldoen, n.l $\triangle$ ABC en $\triangle$ AB_1C (Zie fig. 34).

Dit wisten we trouwens vooruit, daar tegenover den gegeven hoek de kleinste der twee gegeven zijden ligt.

Verdere oplossing voor $\triangle$ ABC:

$$A = 180^\circ - (63^\circ 0'26'' + 48^\circ 16'26'') = 68^\circ 43' 8''$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \text{ dus } a = \frac{c \sin A}{\sin C}$$

$$\log a = \log c + \log \sin A - \log \sin C$$

$$\begin{array}{rl} \log c = & 0{,}87967 - 1 \\ \log \sin A = & 9{,}96933 - 10 \\ \hline & 10{,}84900 - 11 \quad + \\ \log \sin C = & 9{,}87293 - 10 \\ \hline \log a = & 0{,}97607 - 1 \quad - \\ a = & 0{,}9464 \end{array}$$

Verdere oplossing voor $\triangle$ AB_1C:

$$A = 180^\circ - (116^\circ 59'34'' + 48^\circ 16' 26'') = 14^\circ 44'$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, \text{ dus } a = \frac{c \sin A}{\sin C}$$

$$\log a = \log c + \log \sin A - \log \sin C$$

$$\begin{array}{rl} \log c = & 0{,}87967 - 1 \\ \log \sin A = & 9{,}40538 - 10 \\ \hline & 10{,}28505 - 11 \quad + \\ \log \sin C = & 9{,}87293 - 10 \\ \hline \log a = & 0{,}41212 - 1 \quad - \\ a = & 0{,}2583. \end{array}$$

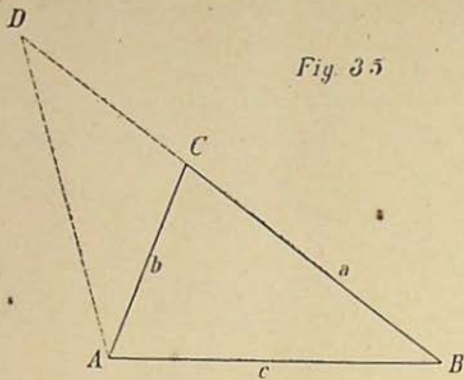


Fig. 35

Voorbeeld IV: Geg. (Zie fig. 35): $A = 69^\circ\ 17'\ 25''$;
$B = 47^\circ\ 35'\ 35''$; $a + b = 19.75$

Gevraagd: De overige elementen.

Oplossing:

$C = 180^\circ - (69^\circ\ 17'\ 25'' + 47^\circ\ 35'\ 35'') = 63^\circ\ 7'$.

We verlengen BC met een stuk $CD = AC$, dan is $BD = a + b = 19.75$

$\angle D = \angle DAC = \frac{1}{2}\ C = 31^\circ\ 33'\text{-}30''$

$\angle BAD = 69^\circ\ 17'\ 25'' + 31^\circ\ 33'\ 30'' = 100^\circ\ 50'\ 55''$

In $\triangle$ ABD is $\frac{AB}{\sin D} = \frac{BD}{\sin BAD}$, dus $AB = \frac{BD \sin D}{\sin BAD}$.

$\log AB = \log BD + \log \sin D - \log \sin BAD$.

$$
\begin{array}{rl}
\log BD = & 1,29557 \\
\log \sin D = & 9.71881 - 10 \\
\hline
& 11,01438 - 10 \quad + \\
\log \sin BAD = & 9.99217 - 10 \\
\hline
\log AB = & 1.02221 \quad - \\
AB = & 10,525
\end{array}
$$

In $\triangle$ ABC is: $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ of $a = \frac{c \sin A}{\sin C}$,

$\log a = \log c + \log \sin A - \log \sin C$

$\log c = 1.02221$

$$\log \sin A = 9{,}97099 - 10$$
$$\overline{} +$$
$$10.99320 - 10$$
$$\log \sin C = 9{,}95033 - 10$$
$$\overline{} -$$
$$\log a = 1{,}04287$$
$$a = 11{,}037$$
$$b = 19{,}75 - 11{,}037 = 8{,}713$$

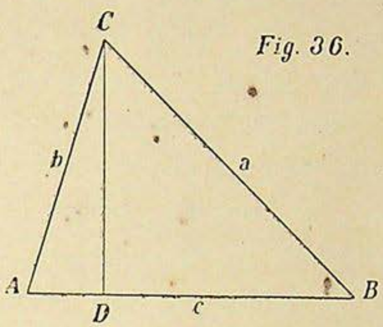


Fig. 36.

§ 2. In $\triangle$ ABC (zie fig. 36) ligt de zijde BC tegenover een scherpen hoek.

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\ AB \times AD$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ c \times AD$$

Maar in $\triangle$ ACD is AD = b. cos A, zoodat we vinden

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A.$$

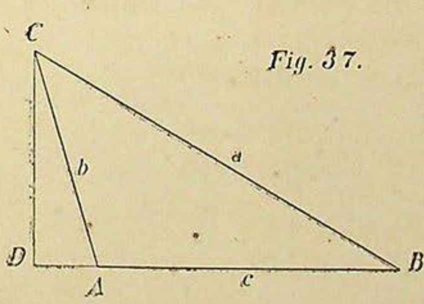


Fig. 37.

In fig. 37 ligt de zijde BC van $\triangle$ ABC tegenover een stompen hoek, dus

$BC^2 = AC^2 + AB^2 + 2\ AB \times AD$

$a^2 = b^2 + c^2 + 2\ c \times AD.$

Maar in $\triangle$ ACD is AD $=$ b. cos $\llcorner$ DAC $= -$ b cos A (want de cosinus van een hoek is het tegengestelde van de cosinus van zijn supplement).

dus
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\ c \times (-\ b \cos A)$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ bc \cos A.$$

Cosinusregel: In een driehoek is het quadraat van een zijde gelijk aan de som van de quadraten der twee andere zijden, verminderd met het dubbele product dezer twee zijden maal de cosinus van den ingesloten hoek.

Omdat echter de cosinusregel niet logarithmisch is, wordt hij voor een berekening liever niet toegepast. Men zou met behulp van den cosinusregel de derde zijde van een driehoek kunnen berekenen, als de twee andere zijden met den ingesloten hoek gegeven zijn.

Voorbeeld: *Geg.*: $a = 15{,}2$; $b = 20{,}8$; $C = 52^\circ\ 17'\ 30''$.

Gevr.: c.

Oplossing.: $c^2 = a^2 + b^2 - 2\ ab \cos C$.

Stel $2\ ab \cos C = p$, dan is $\log p = \log 2 + \log a + \log b + \log \cos C$.

$$
\begin{aligned}
\log 2 &= 0.30103 \\
\log a &= 1.18184 \\
\log b &= 1.31806 \\
\log \cos C &= 9.78650-10 \\
\hline
\log p &= 2.58743 \\
p &= 386{,}75
\end{aligned}
$$

$c^2 = 231.04 + 432.64 - 386.75 = 276.93$

$c = \sqrt{276.93} = 16.64$

A of B kunnen we nu berekenen door toepassing van den sinusregel.

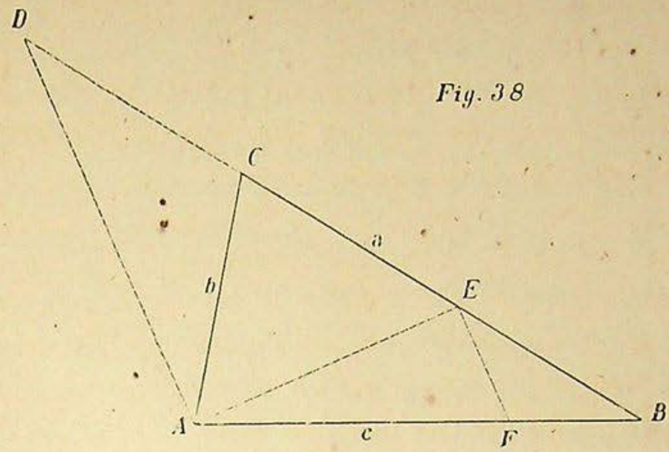


Fig. 38

Om de onbekende elementen van een driehoek te berekenen, wanneer twee zijden en den ingesloten hoek gegeven zijn, kan men beter toepassen den zoogenaamden *tangensregel.*

In $\triangle$ ABC (Zie fig. 38) maken we CE = CD = CA, dan is BD = a + b en BE = a — b.

$A + B = 180^\circ - C.$

In $\triangle$ ACE is $\angle$ CAE = $\angle$ CEA, terwijl de som dezer twee hoeken gelijk is aan 180° — C of A + B, dus $\angle$ CAE = $\angle$ CEA $= \frac{A + B}{2}$; $\angle$ EAB = A — $\angle$ CAE =

$$A - \frac{A + B}{2} = \frac{A - B}{2}$$

$\angle$ DAE = 90°. Trekken we nu EF $\parallel$ AD, dan is ook $\angle$ AEF = 90°.

In den rechthoekigen driehoek ADE is AD = AE tg AED = AE tg $\frac{1}{2}$ (A + B).

In den rechthoekigen driehoek AEF is EF = AE tg EAB = AE tg $\frac{1}{2}$ (A — B).

$\triangle$ ABD $\backsim$ $\triangle$ FBE, dus BD : BE = AD : FE of

$$(a + b) : (a - b) = AE \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A + B) : AE \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A - B)$$

$$(a + b) : (a - b) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A + B) : \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A - B)$$

Deze evenredigheid noemt men den *tangensregel*.

Is $b > a$, dus ook $B > A$ dan vindt men:

$$(b + a) : (b - a) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (B + A) : \operatorname{tg} \frac{1}{2} (B - A)$$

Dezen tangensregel nu past men toe, als van een driehoek gegeven zijn twee zijden en de ingesloten hoek.

Voorbeeld: *Geg.*: $b = 512{,}4$; $c = 318{,}6$; $A = 108^\circ 16' 24''$.

Gevraagd: De overige elementen.

Oplossing: $B + C = 180^\circ - 108^\circ 16' 24'' = 71^\circ 43' 36''$.

Volgens den tangensregel heeft men:

$$(b + c) : (b - c) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (B + C) : \operatorname{tg} \frac{1}{2} (B - C).$$

$$831 : 193{,}8 = \operatorname{tg} 35^\circ 51' 48'' : \operatorname{tg} \frac{1}{2} (B - C)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (B - C) = \frac{193{,}8 \operatorname{tg} 35^\circ 51' 48''}{831}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} (B - C) = \log 193{,}8 + \log \operatorname{tg} 35^\circ 51' 48'' - \log 831.$$

$$\begin{array}{rll}
\log 193{,}8 = & 2.28735 & \\
\log \operatorname{tg} 35^\circ 51' 48'' = & 9.85908 - 10 & \\
\hline
 & 12.14643 - 10 & + \\
\log 831 = & 2.91960 & \\
\hline
\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} (B - C) = & 9.22683 - 10 & - \\
\frac{1}{2} (B - C) = & 9^\circ 34' 10'' &
\end{array}$$

Daar $\frac{1}{2} (B + C) = 35^\circ 51' 48''$, vindt men:

$B = 45^\circ 25' 58''$ en $C = 26^\circ 17' 38''$

De zijde a wordt nu berekend door toepassing van den sinusregel:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \text{ waaruit } a = \frac{b \sin A}{\sin B}$$

$$
\begin{aligned}
\log a &= \log b + \log \sin A - \log \sin B \\
\log b &= 2.70961 \\
\log \sin A &= 9.97752 - 10 \quad + \\
&\ 12.68713 - 10 \\
\log \sin B &= 9.85274 - 10 \quad - \\
\log a &= 2.83439 \\
a &= 682{,}95.
\end{aligned}
$$

§ 4. Zijn van een driehoek de drie zijden bekend, dan kunnen door de volgende formules de hoeken berekend worden:

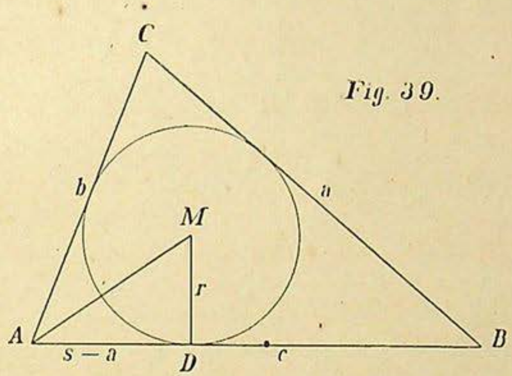


Fig. 39.

We construeeren den ingeschreven cirkel M (Zie fig. 39) en trekken MD ⊥ AB, dan is AD = s − a; MD = r en ∟ e MAD = $\frac{1}{2}$ A.

$$\mathrm{tg} \angle MAD = \mathrm{tg}\, \frac{1}{2} A = \frac{MD}{AD} = \frac{r}{s-a} = \frac{O/s}{s-a} =$$

$$= \frac{O}{s(s-a)} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s(s-a)} = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2 (s-a)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

Op gelijke wijze vinden we:

$$\text{tg } \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} \text{ en tg } \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

Voorbeeld: *Geg.*: a = 16,38; b = 20,47; c = 26,25

Gevraagd: De hoeken.

Oplossing: $s = \frac{16.38 + 20.47 + 26.25}{2} = 31.55$

$s - a = 31.55 - 16.38 = 15.17$

$s - b = 31.55 - 20.47 = 11.08$

$s - c = 31.55 - 26.25 = 5.3$

$$\text{tg } \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \sqrt{\frac{11.08 \times 5.3}{31.55 \times 15.17}}$$

$$\log \text{tg} \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} \left\{ (\log 11.08 + \log 5.3) - (\log 31.55 + \log 15.17) \right\}.$$

$$\begin{array}{lll} \log\ 11.08 = 1.04454 & \qquad & \log\ 31.55 = 1.49900 \\ \log\ \ 5.3 = 0.72428 & & \log\ 15.17 = 1.18099 \\ \hline \quad 21.76882 - 20 \quad + & & \quad 2.67999 \quad + \\ \quad\ \ 2.67999 & & \\ \hline \quad 19.08883 - 20 \quad - & & \end{array}$$

$$2 \overline{}$$

$$\log \text{ tg } \frac{1}{2} A = 9.54442 - 10$$

$$\frac{1}{2} A = 19^\circ\ 18'\ 17'' \text{ dus } A = 38^\circ\ 36'\ 34''$$

$$\text{tg } \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} = \sqrt{\frac{15.17 \times 5.3}{31.55 \times 11.08}}$$

$$\log \text{tg} \frac{1}{2} B = \frac{1}{2} \left\{ (\log 15.17 + \log 5.3) - (\log 31.55 + \log 11.08) \right\}$$

$$\begin{array}{lll} \log\ 15.17 = 1.18099 & \qquad & \log 31.55 = 1.49900 \\ \log\ \ 5.3 = 0.72428 & & \log 11.08 = 1.04454 \\ \hline \quad 21.90527 - 20 \quad + & & \quad 2.54354 \quad + \\ \quad\ \ 2.54354 & & \\ \hline \quad 19.36173 - 20 \quad - & & \end{array}$$

$$2 \overline{}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} B = 9.68087 - 10$$

$$\frac{1}{2} B = 25^\circ\ 37'\ 19'' \text{ dus } B = 51^\circ\ 14'\ 38''$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s\,(s-c)}} = \sqrt{\frac{15.17 \times 11.08}{31.55 \times 5.3}}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} \left\{ (\log 15.17 + \log 11.08) - (\log 31.55 + \log 5.3) \right\}$$

$$\begin{array}{lrlr}
\log 15.17 = & 1.18099 & \log 31.55 = & 1.49900 \\
\log 11.08 = & 1.04454 & \log\ \ 5.3 = & 0.72428 \\
\hline
 & 22.22553 - 20 & & 2.22328 \\
 & 2.22328 & & \\
\hline
 & 20.00225 - 10 & & \\
\end{array}$$

$$\frac{20.00225 - 10}{2}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} C = 10.00113 - 10$$

$$\frac{1}{2} C = 45^\circ 4'\ 29'' \text{ dus } C = 90^\circ 8'\ 58''.$$

N. B. Ook de derde hoek C, is met behulp der formule berekend. Dan heeft men door optelling der drie gevonden hoeken een middel om eventueele fouten te ontdekken.

§ 5. *Opgaven*:

1). $a = 0{,}8752$; $B = 52^\circ\ 18'\ 37''$; $C = 80^\circ\ 19'\ 19''$. Bereken de overige elementen, de oppervlakte en den straal van den omgeschreven cirkel.

2). $b = 734{,}64$; $A = 28^\circ\ 34'\ 45''$; $B = 77^\circ\ 22'\ 46''$. Bereken de overige elementen en de oppervlakte.

3). $c = 91{,}792$; $A = 39^\circ\ 41'\ 42''$; $B = 102^\circ\ 26'\ 10''$. Bereken de overige elementen.

4). $a + c = 26$; $B = 35^\circ\ 16'\ 24''$; $C = 71^\circ\ 2'\ 30''$. Bereken de drie zijden.

5). $b + c = 264{,}75$; $A = 60^\circ\ 18'\ 25''$; $B = 49^\circ\ 17'\ 30''$. Bereken de zijden.

6). $a - b = 12{,}946$; $A = 73^\circ 16' 25''$; $B = 42^\circ 53' 42''$.
Bereken de oppervlakte.

7). De omtrek van een driehoek bedraagt 1 M. Twee zijner hoeken zijn $48^\circ 19' 27''$ en $59^\circ 28' 30'$. Bereken de zijden.

8). $a + b - c = 12{,}645$; $A = 39^\circ 39' 39''$; $B = 75^\circ 18' 27''$.
Bereken de zijden en de oppervlakte.

9). $a = 15.742$; $b = 20.948$; $B = 67^\circ 48' 24''$.
Bereken de overige elementen.

10). $b = 0.89246$; $c = 0.7248$; $B = 58^\circ 16' 35''$.
Bereken de overige elementen.

11). $a = 26{,}74$; $b = 30{,}82$; $A = 39^\circ 18' 37''$
Gevraagd de overige elementen.

12). $a = 0.05926$; $c = 0.06289$; $A = 53^\circ 27' 38''$.
Bereken de overige elementen.

13). $a = 16.92$; $b = 22.26$; $C = 64^\circ 19' 36''$
Bereken de oppervlakte en de onbekende elementen.

14). $b = 0{,}5289$; $c = 0{,}7836$; $A = 108^\circ 16' 24''$
Bereken de overige elementen.

15). $a = 1008{,}08$; $c = 900{,}6$; $B = 66^\circ 17' 34''$
Bereken den straal van den omgeschreven cirkel.

16). De drie zijden van een driehoek zijn respectievelijk 9,642; 8,728 en 10,946 dM. Hoe groot zijn de hoeken A, B en C?

17). $a = 0.0428$; $b = 0.0672$ en $c = 0.0856$. Hoe groot zijn de hoeken A, B en C?

18). Twee hoeken van een driehoek zijn $65^\circ 17' 20''$ en $53^\circ 18' 30''$, terwijl de straal van den omgeschreven cirkel 15,6 cM. bedraagt. Bereken de zijden van dezen driehoek.

19). Van $\triangle$ ABC is AB = 34,89 dM en AC = 25,86 dM terwijl de straal van den omgeschreven cirkel 18,76 dM bedraagt. Bereken de onbekende elementen van den driehoek.
(Er voldoen twee driehoeken aan de vraag!)

20). De oppervlakte van een driehoek bedraagt 1 M^2. Twee zijner zijden zijn 1,6 M en 1,5 M. Bereken de hoeken en de derde zijde.
(Er voldoen weer twee driehoeken aan de vraag!)

21). Van een parallelogram zijn de diagonalen 18,75 dM en 12,9 dM, terwijl ze elkaar snijden onder een hoek van $110^\circ\ 16'$. Hoe groot is de oppervlakte van dit parallelogram?

22). Van een trapezium zijn de evenwijdige zijden 26 en 12 dM, de opstaande zijden zijn 13 en 15 dM. Bereken de hoeken van dit trapezium.

23). Om een cirkel, waarvan de straal 7,5 cM. bedraagt, is een ruit beschreven met een hoek van $56^\circ\ 19'$. Bereken de oppervlakte van die ruit.

24). De evenwijdige zijde AB van trapezium ABCD is 26,89 M; $\angle A = 70^\circ\ 14'\ 20''$; $\angle B = 48^\circ\ 12'\ 30''$ en de hoogte bedraagt 8,25 M. Bereken de oppervlakte.

25). De diagonalen van een trapezium zijn 18,5 en 22,6 c.M. de som der evenwijdige zijden is 32,3 cM. Onder welken hoek snijden de diagonalen elkaar en hoe groot is de oppervlakte van het trapezium?

26). Van vierhoek ABCD is AB = 25,6 cM.; BC = 22,8 cM., CD = 13,2 cM. en AD = 17,8 cM., terwijl $\angle A = 62^\circ\ 18'\ 30''$ is.

Bereken de overige hoeken en de diagonalen.

27). Van vierhoek ABCD is AB = 50; CD = 30; $\angle A = 63^\circ$; $\angle B = 48^\circ$ en $\angle C = 99^\circ$. Bereken de ontbekende zijden. (Trek CE || DA en AE || DC).

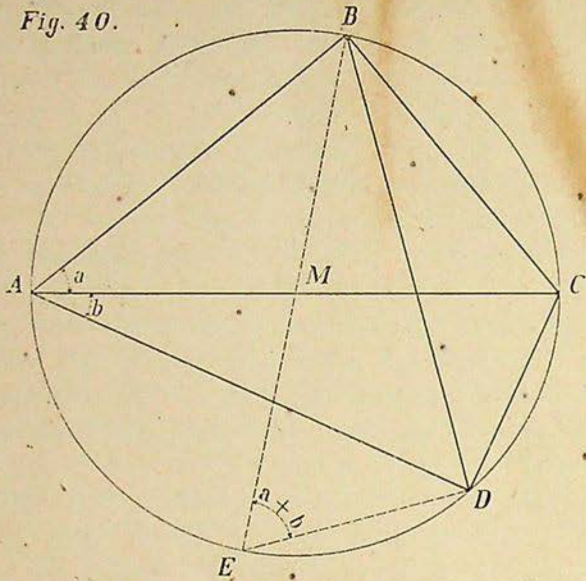
28). In $\triangle$ ABC is M het middelpunt van den ingeschreven cirkel. $\angle C = 65^\circ\ 18'\ 12''$; AM = 5.96 cM; BM; = 7,56 cM. Bereken de onbekende elementen van den driehoek

29). Van een driehoek zijn twee zijden respectievelijk 25,8 en 32,6, terwijl de mediaan op de derde zijde 23,2 bedraagt. Bereken de hoeken van den driehoek.

30). Van vierhoek ABCD is AB = 54, 25 M; $\angle ABC = 69^\circ\ 25'\ 30''$; $\angle ABD = 43^\circ\ 19'\ 26''$; $\angle BAD = 73^\circ\ 36'\ 40''$ en $\angle BAC = 45^\circ\ 16'\ 38''$. Bereken CD.

AANHANGSEL.

Fig. 40.



§ 1. Gegeven zijn twee hoeken *a* en *b*. We trekken cirkel *M* met een willekeurigen straal en daarin de middellijn AC. (Zie fig. 40). We maken ∟ BAC = a en ∟ CAD = b, dan is ∟ BAD = a + b.

Trekken we verder de middellijn B E, dan is ∟ E = ∟ BAD = a + b $(=\frac{1}{2}$ bg BCD).

In den rechthoekigen driehoek ABC is AB = AC cos a en BC = AC sin a.

In den rechthoekigen driehoek ACD is AD = AC cos b en CD = AC sin b.

In den rechthoekigen driehoek BDE is BD = BE sin E = AC sin (a + b).

Passen we in den koordenvierhoek ABCD de stelling van PTOLEMËUS toe, dan vinden we:

$AC \times BD = BC \times AD + AB \times CD$

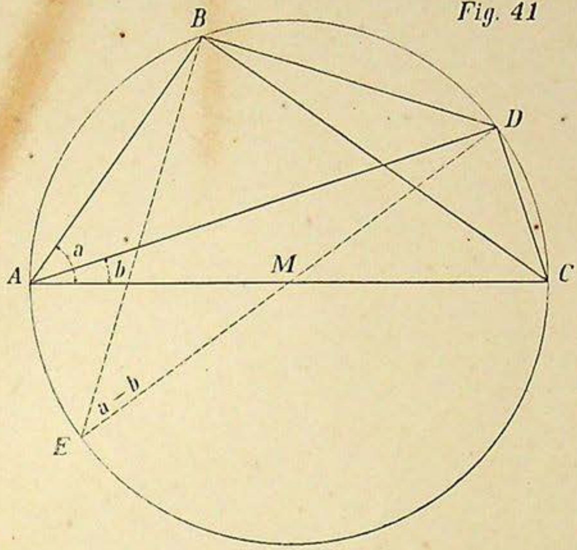
$AC \times AC \sin (a + b) = AC \sin a \times AC \cos b + AC \cos a \times AC \sin b.$

$AC^2 \sin(a + b) = AC^2 \sin a \cos b + AC^2 \cos a \sin b$

AC^2 ——————————————————————

(I). $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$

Fig. 41



We construeeren weer een cirkel M met een willekeurigen straal en daarin een middellijn AC. (Zie fig. 41). We maken ∟ BAC = a en ∟ DAC = b (aan denzelfden kant der middellijn).

Trekken we verder de middellijn DE, dan is ∟ E = ∟ BAD = a − b (= $\frac{1}{2}$ bg BD).

In den rechthoekigen driehoek ABC is AB = AC cos a. en BC = AC sin a.

In den rechthoekigen driehoek ADC is AD = AC cos b en DC = AC sin b.

In den rechthoekigen driehoek BDE is BD = DE sin E = AC sin (a − b).

Passen we in den koordenvierhoek ABDC de stelling VAN PTOLEMEUS toe, dan vinden we:

$AC \times BD + AB \times CD = BC \times AD$

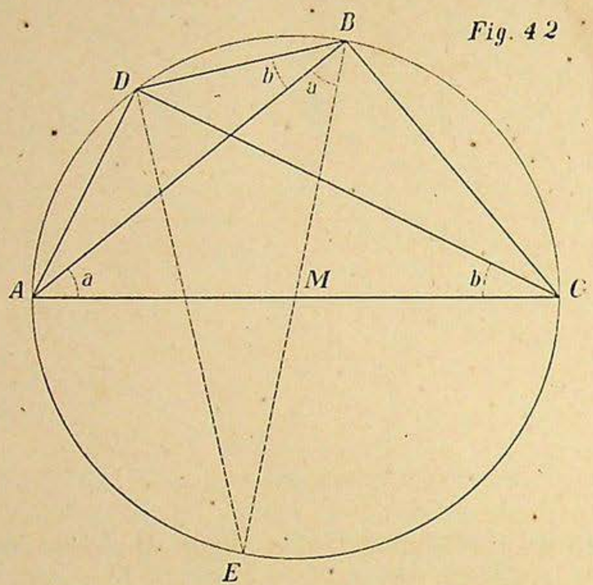
$AC \times AC \sin(a - b) + AC \cos a \times AC \sin b = AC \sin a \times AC \cos b$

$$\frac{AC^2 \sin(a - b) + AC^2 \cos a \sin b = AC^2 \sin a \cos b.}{AC^2}$$

$\sin(a - b) + \cos a \sin b = \sin a \cos b$

(II) $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$

Fig. 42



We maken in cirkel M weer $\angle BAC = a$ en $\angle ACD = b$ (Zie fig. 42). Trek de middellijn BE, dan is $\angle ABM = \angle BAM = a$ en $\angle ABD = \angle ACD = b$ $(= \frac{1}{2}$ bg AD), dus $\angle DBE = a + b$.

In $\triangle ABC$ is $AB = AC \cos a$ en $BC = AC \sin a$.

In $\triangle ADC$ is $AD = AC \sin b$ en $CD = AC \cos b$.

In $\triangle BDE$ is $BD = BE \cos \angle DBE = AC \cos(a + b)$.

We passen in den koordenvierhoek ADBC de stelling van Ptolemeus toe en vinden:

$AC \times BD + BC \times AD = AB \times CD$

$AC \times AC \cos(a + b) + AC \sin a \times AC \sin b = AC \cos a \times AC \cos b.$

$$AC^2 \cos(a+b) + AC^2 \sin a \sin b = AC^2 \cos a \cos b$$
$$AC^2 \quad \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\cos(a+b) + \sin a \sin b = \cos a \cos b$$

(III) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

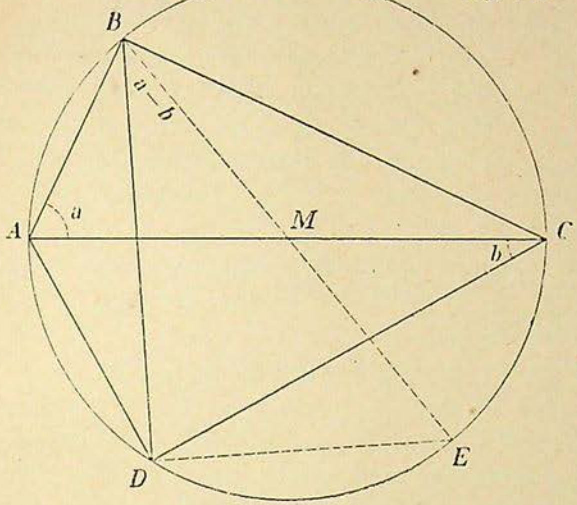


Fig. 43

AC is weer een middellijn in cirkel M; $\angle$ BAC = a en $\angle$ ACD = b. (Zie fig. 43).

Trekken we de middellijn BE, dan is $\angle$ ABM = $\angle$ BAC = a en $\angle$ ABD = $\angle$ ACD = b (= $\frac{1}{2}$ bg AD), dus $\angle$ EBD = $\angle$ ABM — $\angle$ ABD = a — b.

In $\triangle$ ABC is AB = AC cos a en BC = AC sin a.

In $\triangle$ ACD is AD = AC sin b en CD = AC cos b.

In $\triangle$ BDE is BD = BE cos EBD = AC cos (a — b).

Passen we in den koordenvierhoek ABCD de stelling van PTOLEMEUS weer toe, dan vinden we:

$$AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD.$$

$$AC \times AC \cos(a-b) = AC \cos a \times AC \cos b + AC \sin a \times AC \sin b$$

$$AC^2 \cos(a-b) = AC^2 \cos a \cos b + AC^2 \sin a \sin b$$
$$AC^2 \quad \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

(IV) $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$

Opgaven:

Bereken: $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) =$

$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) =$

$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) =$

$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) =$

$\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) =$

$\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ) =$

$\sin 15^\circ = \sin(60^\circ - 45^\circ) =$

$\cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ) =$

$\sin 75^\circ = \sin(135^\circ - 60^\circ) =$

$\cos 75^\circ = \cos(135^\circ - 60^\circ) =$

Herleid met behulp van bovenstaande formules:

$\sin(90^\circ - a) =$

$\cos(90^\circ - a) =$

Welke bekende eigenschap vindt men dan terug?

$\sin(90^\circ + a) =$

$\cos(90^\circ + a) =$

Kunt ge dit ook uit een figuur aantoonen?

$\sin(180^\circ - a) =$

$\cos(180^\circ - a) =$

Welke eigenschappen vindt men hierin terug?

Als x en y hoeken zijn in het eerste quadrant en $\sin x = \frac{4}{5}$, $\sin y = \frac{5}{13}$, bereken dan door de formules: I — IV:

$\sin(x + y)$; $\sin(x - y)$; $\cos(x + y)$ en $\cos(x - y)$.

Als $\cos x = \frac{8}{17}$; $\cos y = \frac{21}{29}$, en x en y liggen beide in het eerste quadrant, hoeveel is dan

$\sin(x + y)$; $\sin(x - y)$; $\cos(x + y)$; $\cos(x - y)$?

In $\triangle ABC$ is $\angle A$ scherp, terwijl $\sin A = \frac{2}{3}$; $\cos B = \frac{3}{4}$. Hoeveel is sin C en cos C. Is hoek C scherp of stomp?

Stelt men in formule I van dit hoofdstuk $b = a$, dan vindt men:

$\sin(a + a) = \sin 2a = \sin a \cos a + \sin a \cos a = 2 \sin a \cos a.$

Doet men hetzelfde in formule III, dan vindt men:

$\cos(a + a) = \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 b = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1.$

Opgaven:

Als $a < 90^\circ$ en $\sin a = \frac{3}{4}$, hoeveel is dan $\sin 2a$ en $\cos 2a$?

Als $p < 90^\circ$ en $\cos p = \frac{2}{3}$, hoeveel is dan $\sin 2p$ en $\cos 2p$?

$\cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; hoeveel is dan $\sin 22^\circ\ 30'$ en $\cos 22^\circ\ 30'$?

§ 2.
$$\begin{array}{l} \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \hline \sin(a + b) + \sin(a - b) = 2 \sin a \cos b. \end{array} +$$

Stelt men hierin $a + b = p$ en $a - b = q$, dan vindt men

$$\begin{array}{c} a + b = p \\ a - b = q \\ \hline 2a = p + q \\ a = \dfrac{p+q}{2} \end{array} + \qquad \begin{array}{c} a + b = p \\ a - b = q \\ \hline 2b = p - q \\ b = \dfrac{p-q}{2} \end{array} -$$

waardoor bovenstaande uitkomst wordt:

$$\text{V.} \quad \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}.$$

$$\begin{array}{l} \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \hline \sin(a + b) - \sin(a - b) = 2 \cos a \sin b \end{array} -$$

$$\text{VI.} \quad \sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}.$$

$$\begin{array}{l} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \hline \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b \end{array} \; +$$

$$\text{VII. } \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\begin{array}{l} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \hline \cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \sin a \sin b \end{array} \; -$$

$$\text{VIII. } \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

Opgaven: Bereken:

$\sin 35^\circ + \sin 25^\circ =$	$\sin 37^\circ 20' + \sin 28^\circ 40' =$
$\sin 42^\circ + \sin 18^\circ =$	$\sin 59^\circ 30' + \sin 47^\circ 12' =$
$\sin 74^\circ - \sin 14^\circ =$	$\sin 49^\circ 18' - \sin 12^\circ 36' =$
$\sin 85^\circ - \sin 25 =$	$\sin 78^\circ 37' - \sin 23^\circ 29' =$
$\cos 74^\circ + \cos 14^\circ =$	$\cos 56^\circ 17' + \cos 21^\circ 19' =$
$\cos 65^\circ + \cos 55^\circ =$	$\cos 26^\circ 35' + \cos 59^\circ 42' =$
$\cos 16^\circ - \cos 76^\circ =$	$\cos 12^\circ 18' - \cos 64^\circ 22' =$
$\cos 12^\circ + \cos 57^\circ =$	$\cos 24^\circ 24' - \cos 48^\circ 48' =$

Bewijs de volgende formules:

$$\frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2}$$

$$\frac{\sin a - \sin b}{\cos a + \cos b} = \operatorname{tg} \frac{a-b}{2}$$

$$\frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = -\operatorname{cotg} \frac{a-b}{2}$$

$$\frac{\sin a - \sin b}{\cos a - \cos b} = -\operatorname{cotg} \frac{a+b}{2}$$

$$\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} \operatorname{cotg} \frac{a-b}{2}$$

$$\frac{\cos a + \cos b}{\cos a - \cos b} = - \operatorname{cotg} \frac{a+b}{2} \operatorname{cotg} \frac{a-b}{2}$$

Bereken:

$$\frac{\sin 57^\circ 12' + \sin 23^\circ 38'}{\cos 57^\circ 12' + \cos 23^\circ 38'} =$$

$$\frac{\sin 62^\circ 17'20'' - \sin 17^\circ 19'40''}{\cos 62^\circ 17'20'' + \cos 17^\circ 19'40''} =$$

$$\frac{\sin 71^\circ 14'38'' + \sin 25^\circ 17'42''}{\cos 71^\circ 14'38'' - \cos 25^\circ 17'42''} =$$

$$\frac{\sin 80^\circ 40'16'' - \sin 21^\circ 32'18''}{\cos 80^\circ 40'16'' - \cos 21^\circ 32'18''} =$$

$$\frac{\sin 59^\circ 16' + \sin 18^\circ 47''}{\sin 59^\circ 16'' - \sin 18^\circ 47'} =$$

$$\frac{\cos 68^\circ 14' + \cos 21^\circ 33'}{\cos 68^\circ 14' - \cos 21^\circ 33'} =$$